



Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

MIN-Fakultät  
Fachbereich Informatik



# 64-040 Modul InfB-RSB

## Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

[https://tams.informatik.uni-hamburg.de/  
lectures/2024ws/vorlesung/rsb](https://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2024ws/vorlesung/rsb)

– Kapitel 4 –

Andreas Mäder



Universität Hamburg  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Fachbereich Informatik

**Technische Aspekte Multimodaler Systeme**

Wintersemester 2024/2025



## Arithmetik

Addition und Subtraktion

Multiplikation

Division

Höhere Funktionen

Mathematische Eigenschaften

Literatur



# Wiederholung: Stellenwertsystem („Radixdarstellung“)

- ▶ Wahl einer geeigneten Zahlenbasis  $b$  („Radix“)
  - ▶ 10: Dezimalsystem
  - ▶ 16: Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem)
  - ▶ 2: Dualsystem
- ▶ Menge der entsprechenden Ziffern  $\{0, 1, \dots, b - 1\}$
- ▶ inklusive einer besonderen Ziffer für den Wert Null
- ▶ Auswahl der benötigten Anzahl  $n$  von Stellen

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

$b$  Basis     $a_i$  Koeffizient an Stelle  $i$

- ▶ universell verwendbar, für beliebig große Zahlen

C:

- ▶ Zahlenbereiche definiert in Headerdatei `/usr/include/limits.h`  
`LONG_MIN`, `LONG_MAX`, `ULONG_MAX` etc.
- ▶ Zweierkomplement (`signed`), Ganzzahl (`unsigned`)
- ▶ die Werte sind plattformabhängig !

Java:

- ▶ 16-bit, 32-bit, 64-bit Zweierkomplementzahlen
- ▶ Wrapper-Klassen `Short`, `Integer`, `Long`

```
Short.MAX_VALUE      =      32767
Integer.MIN_VALUE    = -2147483648
Integer.MAX_VALUE    =  2147483647
Long.MIN_VALUE       = -9223372036854775808L
... 
```

- ▶ Werte sind für die Sprache fest definiert

- ▶ funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- ▶ Addition mehrstelliger Zahlen erfolgt stellenweise
- ▶ Additionsmatrix

$$\begin{array}{r|l} + & 0 \ 1 \\ \hline 0 & 0 \ 1 \\ 1 & 1 \ 10 \end{array}$$

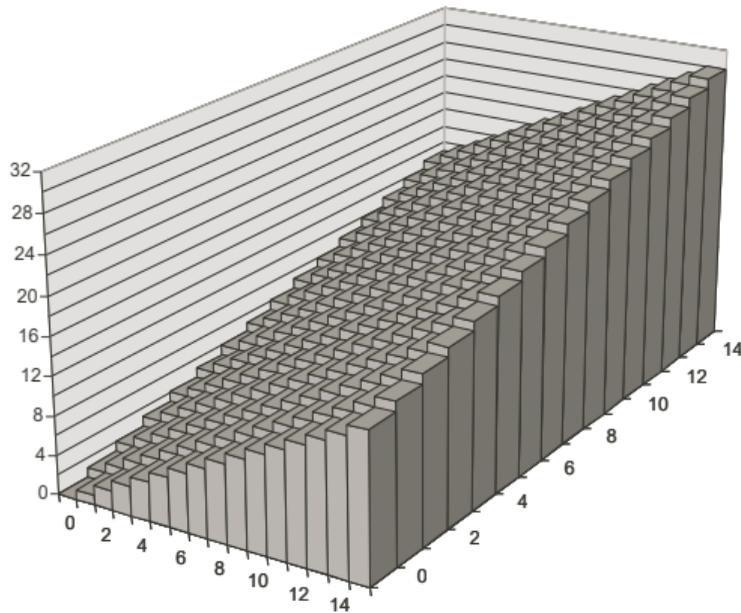
- ▶ Beispiel

$$\begin{array}{r} 1011\ 0011 \\ + 0011\ 1001 \\ \hline \text{Ü} \ 11 \ 11 \\ \hline 1110\ 1100 \end{array} \quad \begin{array}{r} = 179 \\ = 57 \\ \hline 11 \\ \hline = 236 \end{array}$$



# unsigned Addition: Visualisierung

Integer addition

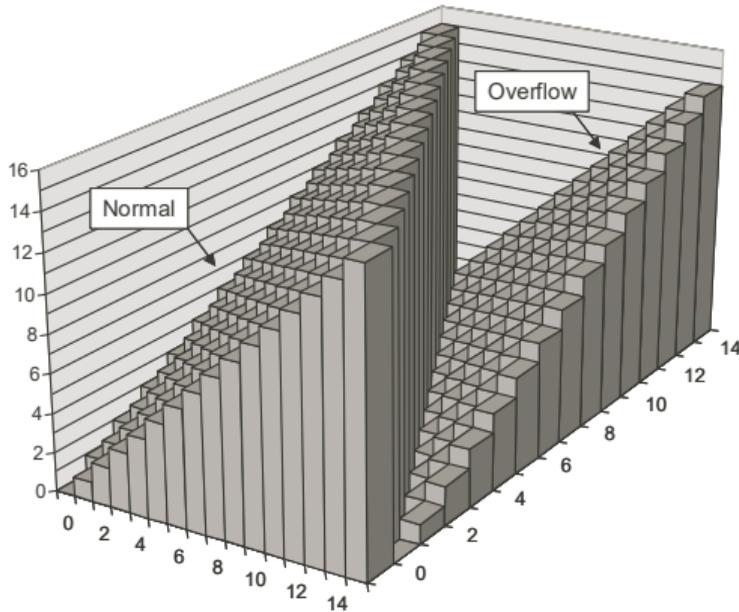


[BO15]

- ▶ Wortbreite der Operanden ist  $w$ , hier 4-bit
- ▶ Zahlenbereich der Operanden  $x, y$  ist  $0 \dots (2^w - 1)$
- ▶ Zahlenbereich des Resultats  $s$  ist  $0 \dots (2^{w+1} - 2)$

# unsigned Addition: Visualisierung (cont.)

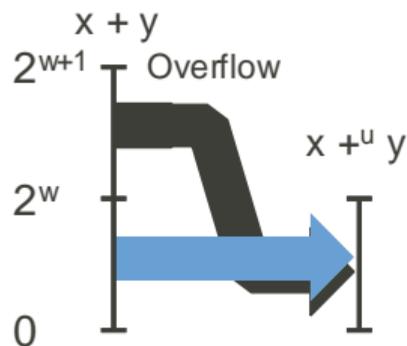
Unsigned addition (4-bit word)



[BO15]

- ▶ Wortbreite der Operanden **und des Resultats** ist  $w$
- ⇒ Überlauf, sobald das Resultat größer als  $(2^w - 1)$
- ⇒ oberstes Bit geht verloren

# unsigned Addition: Überlauf



- ▶ Wortbreite ist  $w$
- ▶ Zahlenbereich der Operanden  $x, y$  ist  $0 \dots (2^w - 1)$
- ▶ Zahlenbereich des Resultats  $s$  ist  $0 \dots (2^{w+1} - 2)$
- ▶ Werte  $s \geq 2^w$  werden in den Bereich  $0 \dots 2^w - 1$  abgebildet

- ▶ Subtraktion mehrstelliger Zahlen erfolgt stellenweise
- ▶ (Minuend - Subtrahend), Überträge berücksichtigen

- ▶ Beispiel

$$\begin{array}{r} 1011\ 0011 \\ - 0011\ 1001 \\ \hline \text{Ü } 1111 \\ \hline 111\ 1010 \end{array} \quad \begin{array}{r} = 179 \\ = 57 \\ \hline = 122 \end{array}$$

- ▶ Alternative: Subtraktion durch Addition des  $b$ -Komplements ersetzen

# Subtraktion mit $b$ -Komplement

- ▶ bei Rechnung mit fester Stellenzahl  $n$  gilt:

$$K_b(z) + z = b^n = 0$$

weil  $b^n$  gerade nicht mehr in  $n$  Stellen hineinpasst

- ▶ also gilt für die Subtraktion auch:

$$x - y = x + K_b(y)$$

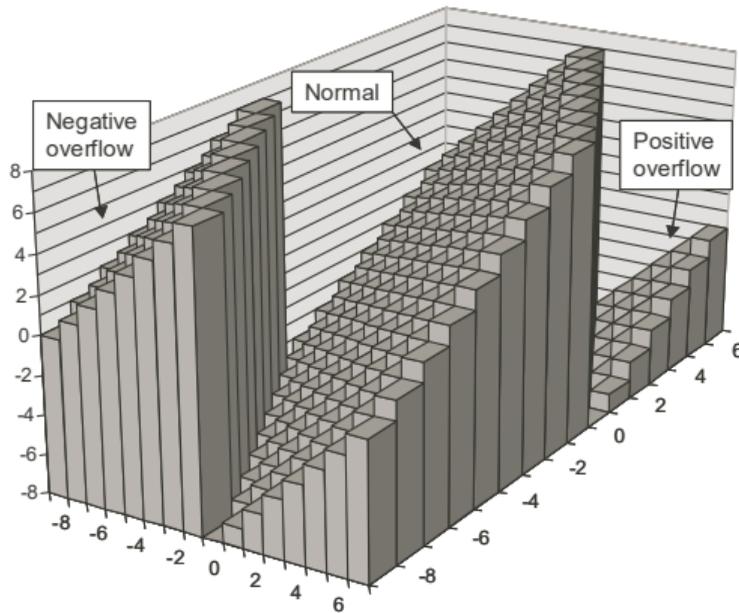
⇒ Subtraktion kann durch Addition des  $b$ -Komplements ersetzt werden!

Voraussetzung: begrenzte Stellenanzahl

- ▶ und für Integerzahlen gilt außerdem

$$x - y = x + K_{b-1}(y) + 1$$

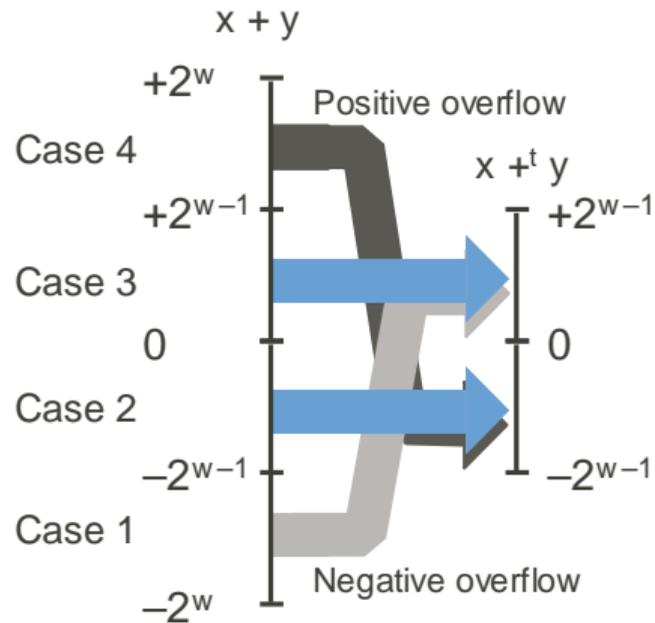
Two's complement addition (4-bit word)



[BO15]

- ▶ Wortbreite der Operanden ist  $w$ , hier 4-bit
  - ▶ Zahlenbereich der Operanden  $x, y$  ist  $-2^{w-1} \dots (2^{w-1} - 1)$
  - ▶ Zahlenbereich des Resultats  $s$  ist  $-2^w \dots (2^w - 2)$
- ⇒ Überlauf in beide Richtungen möglich

# signed Addition: Überlauf



- ▶ Wortbreite des Resultats ist  $w$ : Bereich  $-2^{w-1} \dots (2^{w-1} - 1)$
- ▶ Überlauf positiv wenn Resultat  $\geq 2^{w-1}$ : Summe negativ  
    -- negativ      --  $< -2^{w-1}$ : Summe positiv



- ▶ Erkennung eines Überlaufs bei der Addition?
- ▶ wenn beide Operanden das gleiche Vorzeichen haben und sich das Vorzeichen des Resultats unterscheidet
  
- ▶ Java-Codebeispiel

```
int a, b, sum;           // operands and sum
boolean ovf;            // ovf flag indicates overflow

sum = a + b;
ovf = ((a < 0) == (b < 0)) && ((a < 0) != (sum < 0));
```



# Subtraktion mit Einer- und Zweierkomplement

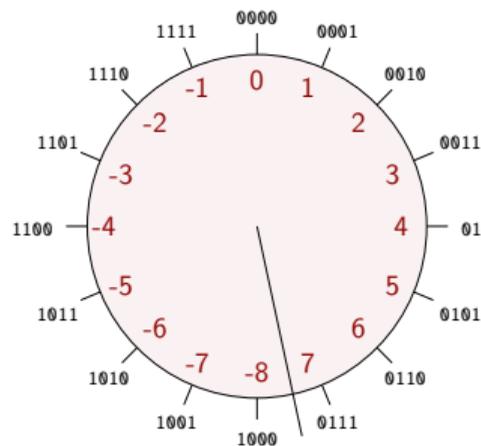
- ▶ Subtraktion ersetzt durch Addition des Komplements

Dezimal	1-Komplement	2-Komplement
$\begin{array}{r} 10 \\ +(-3) \\ \hline +7 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0000\ 1010 \\ 1111\ 1100 \\ \hline 1\ 0000\ 0110 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0000\ 1010 \\ 1111\ 1101 \\ \hline 1\ 0000\ 0111 \end{array}$
Übertrag:	$\begin{array}{r} \text{addieren} \quad +1 \\ \hline 0000\ 0111 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{verwerfen} \\ \hline 0000\ 0111 \end{array}$

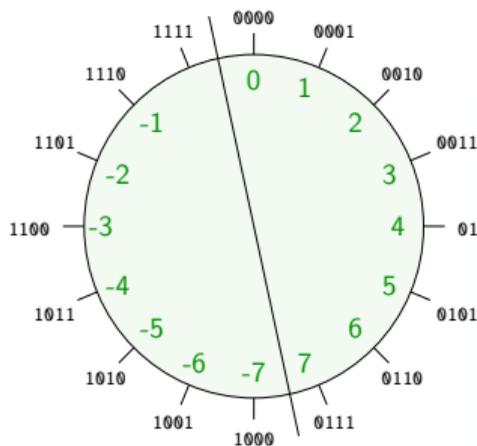
- ▶ **(b-1)-Komplement** der Zahl  $z$   $K_{b-1}(z) = b^n - z - b^{-m}$  für  $z \neq 0$   
 $= 0$  für  $z = 0$
- b-Komplement** der Zahl  $z$   $K_b(z) = b^n - z$  für  $z \neq 0$   
 $= 0$  für  $z = 0$

# Veranschaulichung: Zahlenkreis

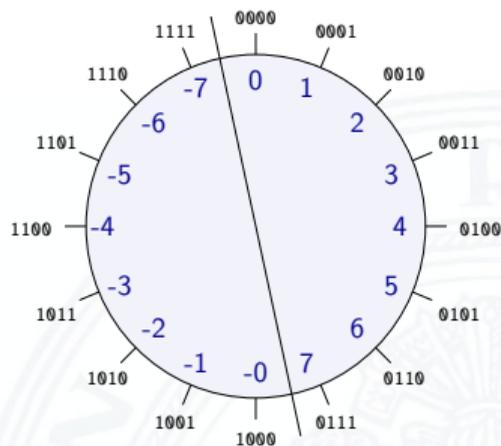
## Beispiel für 4-bit Zahlen



2-Komplement



1-Komplement



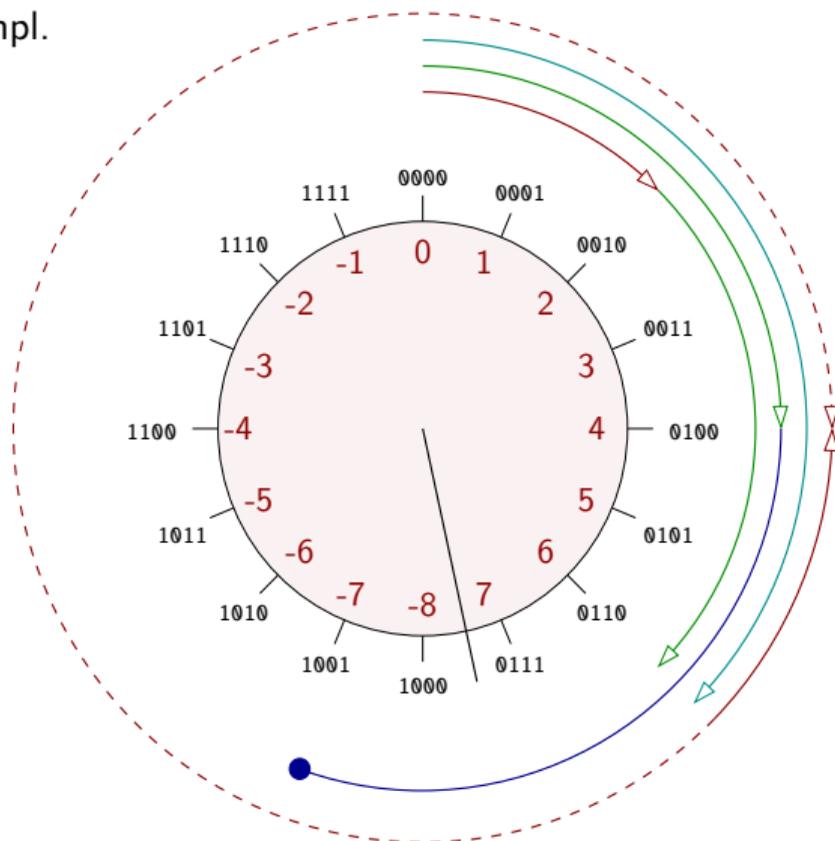
Betrag+Vorzeichen

MSB  $\hat{=}$  Vorzeichen

- ▶ Komplement-Arithmetik als Winkeladdition
- ▶ Web-Anwendung: *Visualisierung im Zahlenkreis* (JavaScript, aus [Kor16])

# Zahlenkreis: Addition, Subtraktion

2-Kompl.



$$0010 + 0100 = 0110$$

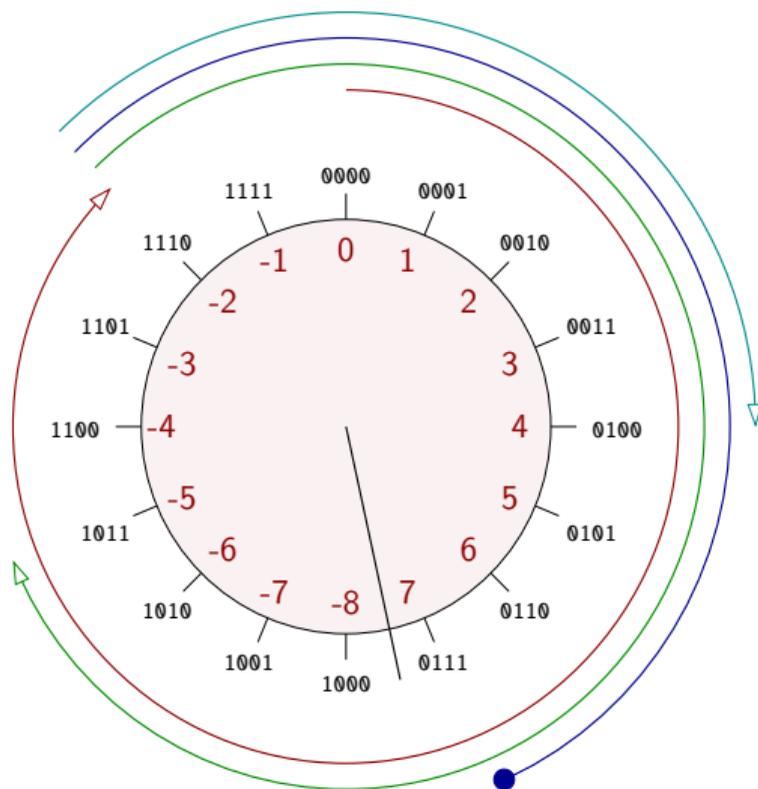
$$0100 + 0101 = 1001$$

$$0110 - 0010 = 0100$$

0010    1110  
0100  
0101  
0110

# Zahlenkreis: Addition, Subtraktion (cont.)

2-Kompl.



$$1110+1101=1011$$

$$1110+1001=0111$$

$$1110+0110=0100$$

1110

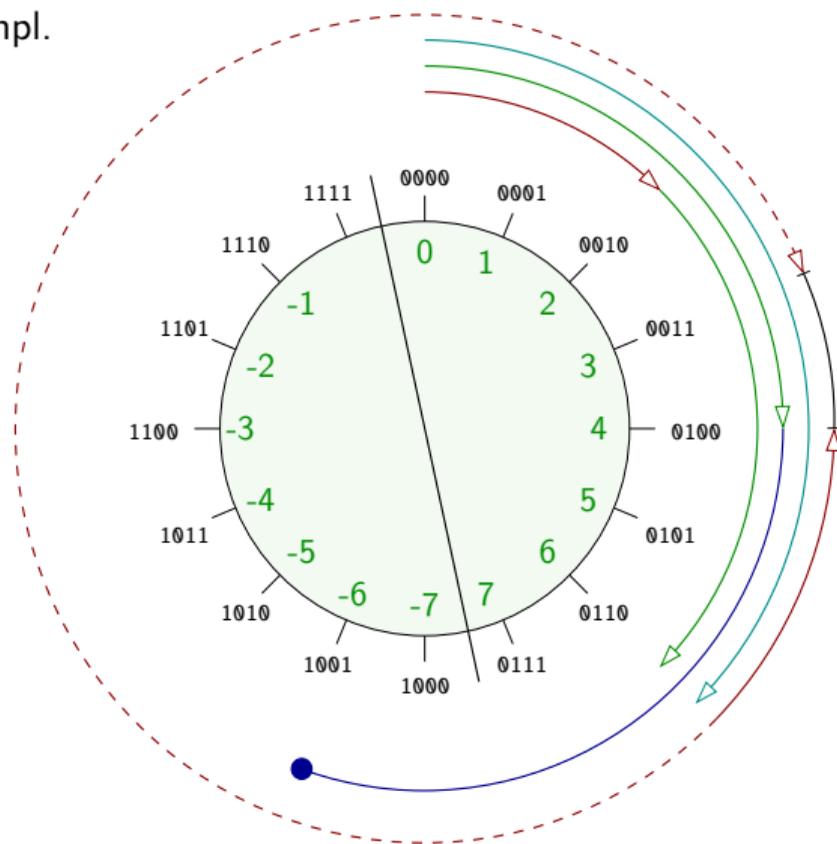
1101

1001

0110

# Zahlenkreis: Addition, Subtraktion (cont.)

1-Kompl.



$$0010 + 0100 = 0110$$

$$0100 + 0101 = 1001$$

$$0110 + 1101 + 1 = 0100$$

0010    1101  
0100  
0101  
0110





- ▶ für hardwarenahe Programme und Treiber
- ▶ für modulare Arithmetik („multi-precision arithmetic“)
- ▶ aber evtl. ineffizient (vom Compiler schlecht unterstützt)
  
- ▶ Vorsicht vor solchen Fehlern

```
unsigned int i, cnt = ...;  
for( i = cnt-2; i >= 0; i-- ) {  
    a[i] += a[i+1];  
}
```





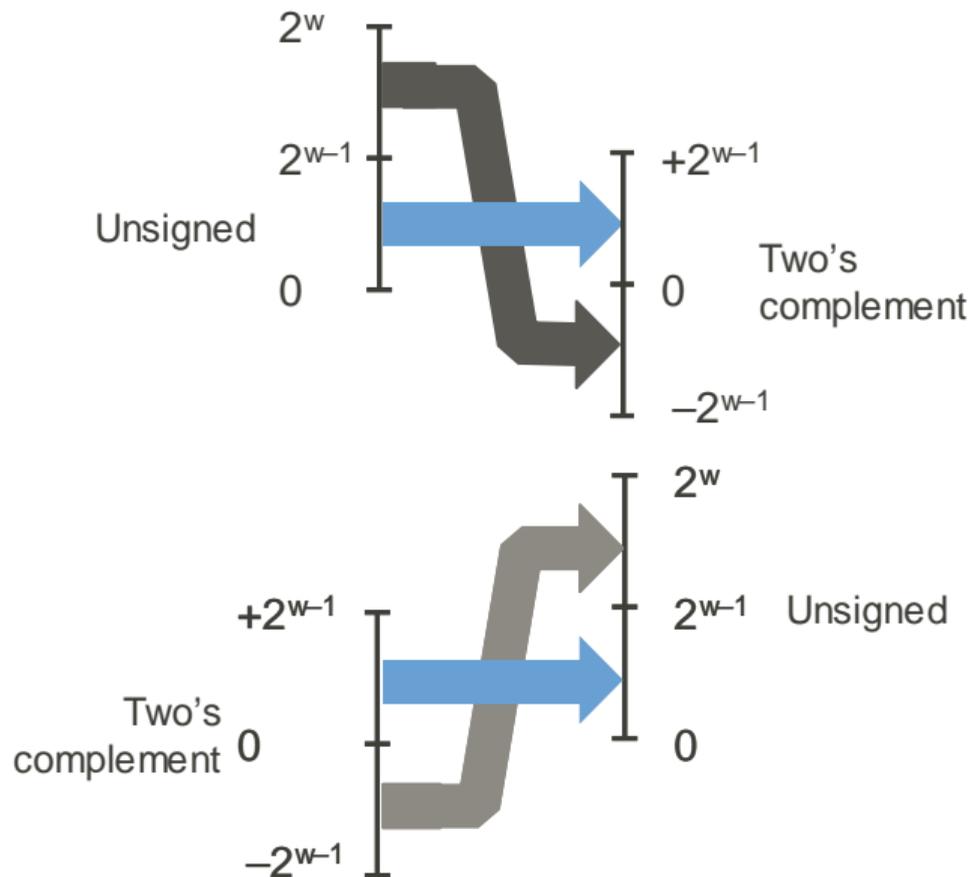
- ▶ Bit-Repräsentation wird nicht verändert
- ▶ kein Effekt auf positiven Zahlen
- ▶ Negative Werte als (große) positive Werte interpretiert

```
short int          x = 15213;
unsigned short int ux = (unsigned short) x; // 15213

short int          y = -15213;
unsigned short int uy = (unsigned short) y; // 50323
```

- ▶ Schreibweise für Konstanten:
  - ▶ ohne weitere Angabe: signed
  - ▶ Suffix „U“ für unsigned: 0U, 4294967259U

# in C: unsigned / signed Interpretation



► Arithmetische Ausdrücke:

- bei gemischten Operanden: Auswertung als unsigned
- auch für die Vergleichsoperationen <, >, ==, <=, >=
- Beispiele für Wortbreite 32-bit:

Konstante 1	Relation	Konstante 2	Auswertung	Resultat
0	==	0U	unsigned	1
-1	<	0	signed	1
-1	<	0U	unsigned	0
2147483647	>	-2147483648	signed	1
2147483647U	>	-2147483648	unsigned	0
2147483647	>	(int) 2147483648U	signed	1
-1	>	-2	signed	1
(unsigned) -1	>	-2	unsigned	1

Fehler



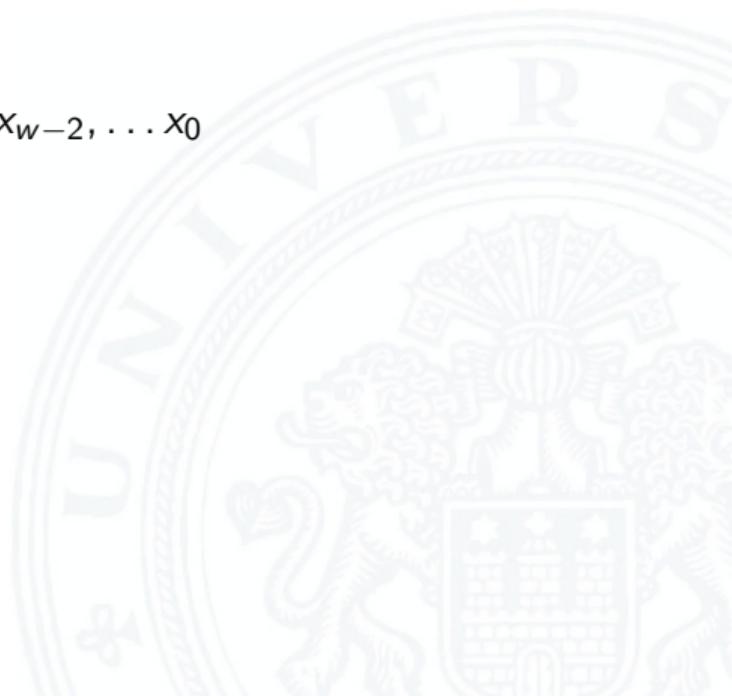
- ▶ Gegeben:  $w$ -bit Integer  $x$
- ▶ Umwandeln in  $w + k$ -bit Integer  $x'$  mit gleichem Wert?

- ▶ **Sign-Extension:** Vorzeichenbit kopieren

$$x' = x_{w-1}, \dots, x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \dots, x_0$$

- ▶ Zahlenbeispiele

0110	4-bit signed: +6
0000 0110	8-bit signed: +6
0000 0000 0000 0110	16-bit signed: +6
1110	4-bit signed: -2
1111 1110	8-bit signed: -2
1111 1111 1111 1110	16-bit signed: -2





# Java Puzzlers No.5

J. Bloch, N. Gafter: *Java Puzzlers: Traps, Pitfalls, and Corner Cases*. Addison-Wesley, 2005

4.1 Arithmetik - Addition und Subtraktion

64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

```
public static void main( String[] args ) {  
    System.out.println(  
        Long.toHexString( 0x100000000L + 0xcafebabe ));  
}
```

- ▶ Programm addiert zwei Konstanten, Ausgabe in Hex-Format
- ▶ Was ist das Resultat der Rechnung?

# Java Puzzlers No.5

J. Bloch, N. Gafter: *Java Puzzlers: Traps, Pitfalls, and Corner Cases*. Addison-Wesley, 2005

4.1 Arithmetik - Addition und Subtraktion

64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

```
public static void main( String[] args ) {  
    System.out.println(  
        Long.toHexString( 0x100000000L + 0xcafebabe ));  
}
```

- ▶ Programm addiert zwei Konstanten, Ausgabe in Hex-Format
- ▶ Was ist das Resultat der Rechnung?

0xffffffffcafebabe	sign-extension!
0x0000000100000000	
<hr/>	
Ü 11111110	
<hr/>	
00000000cafebabe	

- ▶ Erstflug der Ariane-5 („V88“) am 04. Juni 1996
  - ▶ Kurskorrektur wegen vermeintlich falscher Fluglage
  - ▶ Selbstzerstörung der Rakete nach 36,7 Sekunden
  - ▶ Schaden ca. 635 M€  
(teuerster Softwarefehler der Geschichte?)
- 
- ▶ bewährte Software von Ariane-4 übernommen
  - ▶ aber Ariane-5 viel schneller als Ariane-4
  - ▶ 64-bit Gleitkommawert für horizontale Geschwindigkeit
  - ▶ Umwandlung in 16-bit Integer: dabei Überlauf
- 
- ▶ [de.wikipedia.org/wiki/Ariane\\_V88](https://de.wikipedia.org/wiki/Ariane_V88)

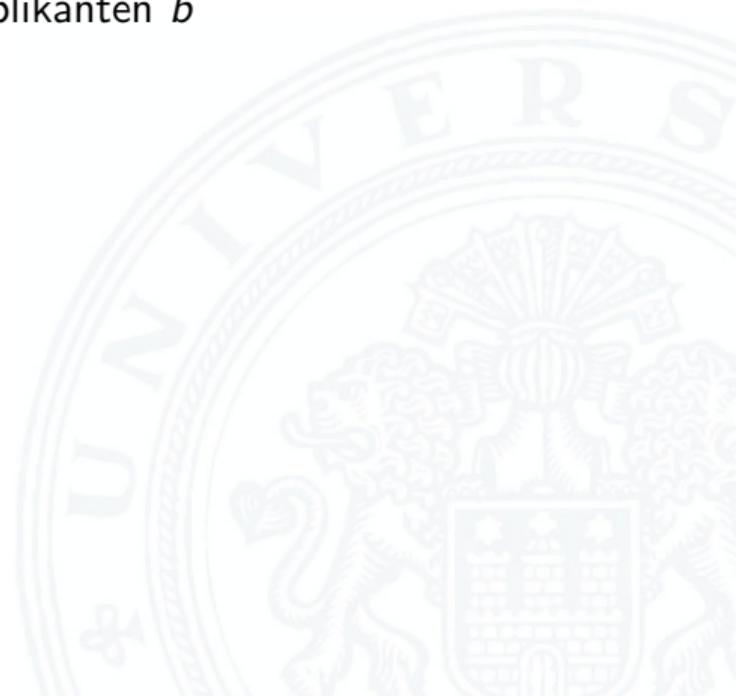




# Multiplikation im Dualsystem

- ▶ funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- ▶  $p = a \cdot b$  mit Multiplikator  $a$  und Multiplikand  $b$
- ▶ Multiplikation von  $a$  mit je einer Stelle des Multiplikanten  $b$
- ▶ Addition der Teilterme
  
- ▶ Multiplikationsmatrix – sehr einfach:  $\cdot 0 / \cdot 1$

$\cdot$		0	1
0		0	0
1		0	1



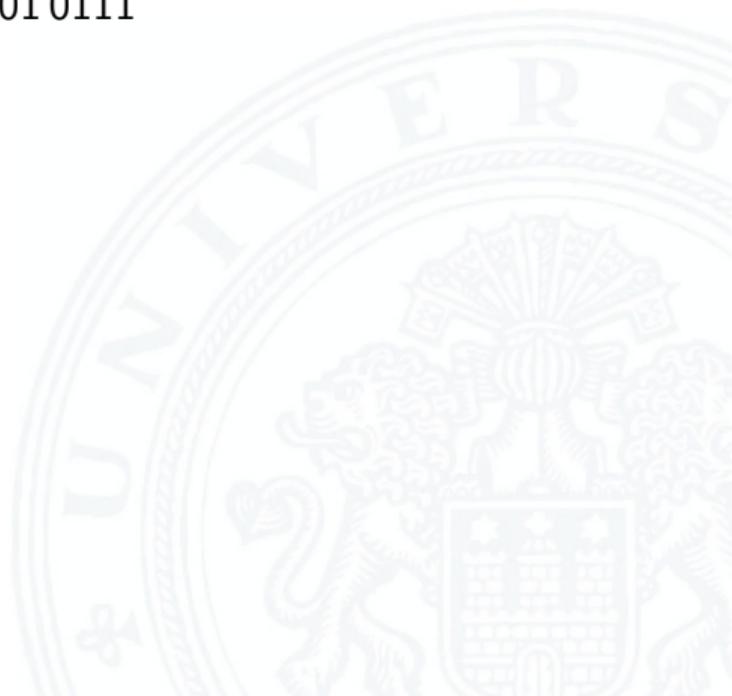


# Multiplikation im Dualsystem (cont.)

► Beispiel

$$\begin{array}{r}
 10110011 \cdot 1101 \\
 \hline
 10110011 \quad 1 \\
 10110011 \quad 1 \\
 00000000 \quad 0 \\
 10110011 \quad 1 \\
 \hline
 \text{Ü } 11101111 \\
 \hline
 100100010111
 \end{array}
 = 179 \cdot 13 = 2327$$

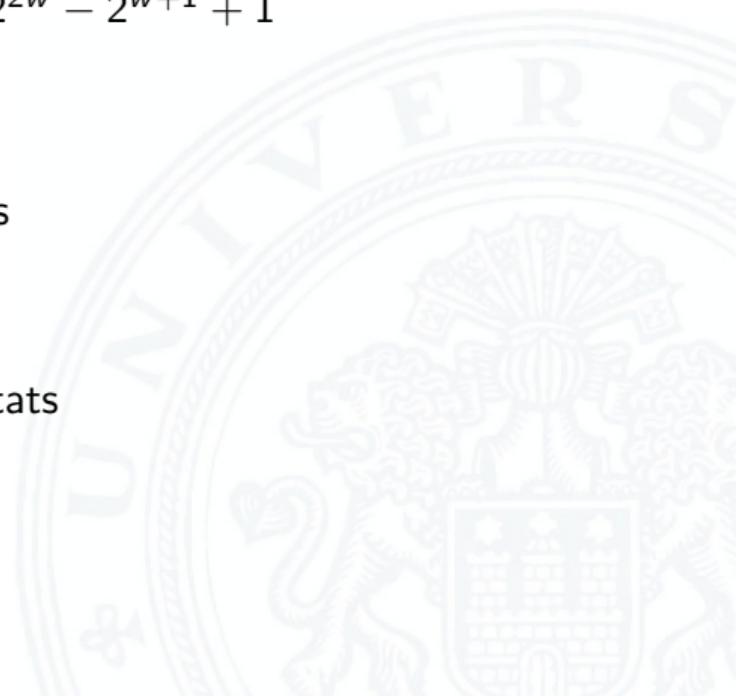
$$\begin{array}{l}
 = 1001\ 0001\ 0111 \\
 = 0x917
 \end{array}$$





- ▶ bei Wortbreite  $w$  bit
  - ▶ Zahlenbereich der Operanden:  $0 \dots (2^w - 1)$
  - ▶ Zahlenbereich des Resultats:  $0 \dots (2^w - 1)^2 = 2^{2w} - 2^{w+1} + 1$
- ⇒ bis zu  $2w$  bits erforderlich

- ▶ C:            Resultat enthält nur die unteren  $w$  bits
- ▶ Java:        keine unsigned Integer
- ▶ Hardware: teilweise zwei Register *high*, *low* für die oberen und unteren Bits des Resultats





- ▶ Zahlenbereich der Operanden:  $-2^{w-1} \dots (2^{w-1} - 1)$
  - ▶ Zahlenbereich des Resultats:  $-2^{w-1} \cdot (2^{w-1} - 1) \dots (2^{2w-2})$
- ⇒ bis zu  $2w$  bits erforderlich

- ▶ C, Java: Resultat enthält nur die unteren  $w$  bits
- ▶ Überlauf wird ignoriert

```
int i = 100*200*300*400; // -1894967296
```

- ▶ Repräsentation der unteren Bits des Resultats entspricht der unsigned Multiplikation
- ⇒ kein separater Algorithmus erforderlich  
Beweis: siehe Bryant, O'Hallaron: Abschnitt 2.3.5 [BO15]



# Java Puzzlers No. 3

J. Bloch, N. Gafter: *Java Puzzlers: Traps, Pitfalls, and Corner Cases*. Addison-Wesley, 2005

4.2 Arithmetik - Multiplikation

64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

```
public static void main( String args[] ) {  
    final long MICROS_PER_DAY = 24 * 60 * 60 * 1000 * 1000;  
    final long MILLIS_PER_DAY = 24 * 60 * 60 * 1000;  
    System.out.println( MICROS_PER_DAY / MILLIS_PER_DAY );  
}
```

# Java Puzzlers No. 3

J. Bloch, N. Gafter: *Java Puzzlers: Traps, Pitfalls, and Corner Cases*. Addison-Wesley, 2005

4.2 Arithmetik - Multiplikation

64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

```
public static void main( String args[] ) {  
    final long MICROS_PER_DAY = 24 * 60 * 60 * 1000 * 1000;  
    final long MILLIS_PER_DAY = 24 * 60 * 60 * 1000;  
    System.out.println( MICROS_PER_DAY / MILLIS_PER_DAY );  
}
```

- ▶ druckt den Wert 5, nicht 1000!
  - ▶ MICROS\_PER\_DAY wird mit 32-bit berechnet, dabei Überlauf
  - ▶ Konvertierung nach 64-bit long erst bei der Zuweisung
- ⇒ long-Konstante schreiben: `24L * 60 * 60 * 1000 * 1000`



- ▶  $d = a/b$  mit Dividend  $a$  und Divisor  $b$
- ▶ funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- ▶ schrittweise Subtraktion des Divisors
- ▶ Berücksichtigen des „Stellenversetzens“
- ▶ in vielen Prozessoren nicht (oder nur teilweise) durch Hardware unterstützt
- ▶ daher deutlich langsamer als Multiplikation





# Division im Dualsystem (cont.)

## ► Beispiele

$$100_{10} / 3_{10} = 110\ 0100_2 / 11_2 = 10\ 0001_2$$

$$\begin{array}{r}
 1100100 \ / \ 11 = 0100001 \\
 \begin{array}{r}
 1 \qquad \qquad \qquad 0 \\
 11 \qquad \qquad \qquad 1 \\
 -11 \\
 \hline
 0 \qquad \qquad \qquad 0 \\
 0 \qquad \qquad \qquad 0 \\
 1 \qquad \qquad \qquad 0 \\
 10 \qquad \qquad \qquad 0 \\
 100 \qquad \qquad \qquad 1 \\
 -11 \\
 \hline
 1 \qquad \qquad \qquad 1 \text{ (Rest)}
 \end{array}
 \end{array}$$





# Division im Dualsystem (cont.)

$$91_{10}/13_{10} = 101\ 1011_2/1101_2 = 111_2$$

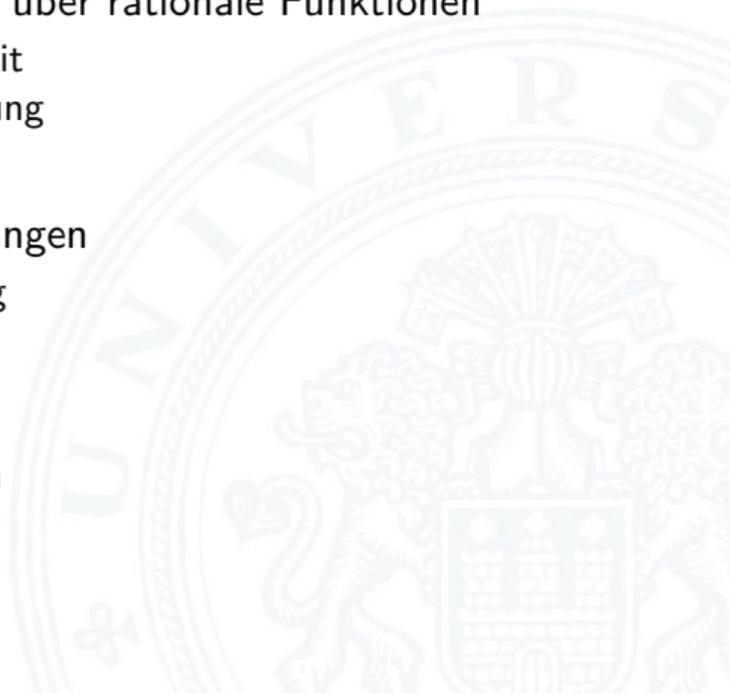
$$\begin{array}{r}
 1011011 \ / \ 1101 = 0111 \\
 1011 \qquad \qquad \qquad 0 \\
 10110 \qquad \qquad \qquad 1 \\
 \hline
 -1101 \\
 \hline
 10011 \qquad \qquad \qquad 1 \\
 -1101 \\
 \hline
 01101 \qquad \qquad \qquad 1 \\
 -1101 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$





Berechnung von  $\sqrt{x}$ ,  $\log x$ ,  $\exp x$ ,  $\sin x \dots$  ?

- ▶ Approximation über Polynom (Taylor-Reihe) bzw. über rationale Funktionen
  - ▶ vorberechnete Koeffizienten für höchste Genauigkeit
  - ▶ Ausnutzen mathematischer Identitäten für Skalierung
- ▶ Sukzessive Approximation über iterative Berechnungen
  - ▶ Beispiele: Quadratwurzel und Reziprok-Berechnung
  - ▶ häufig schnelle (quadratische) Konvergenz
- ▶ Berechnungen erfordern nur die Grundrechenarten





- ▶ Berechnung des Reziprokwerts  $y = 1/x$  über

$$y_{i+1} = y_i \cdot (2 - x \cdot y_i)$$

- ▶ geeigneter Startwert  $y_0$  als Schätzung erforderlich

- ▶ Beispiel  $x = 3$ ,  $y_0 = 0,5$ :

$$\begin{aligned}y_1 &= 0,5 \cdot (2 - 3 \cdot 0,5) &&= 0,25 \\y_2 &= 0,25 \cdot (2 - 3 \cdot 0,25) &&= 0,3125 \\y_3 &= 0,3125 \cdot (2 - 3 \cdot 0,3125) &&= 0,33203125 \\y_4 &= 0,3332824 \\y_5 &= 0,3333333332557231 \\y_6 &= 0,3333333333333333\end{aligned}$$





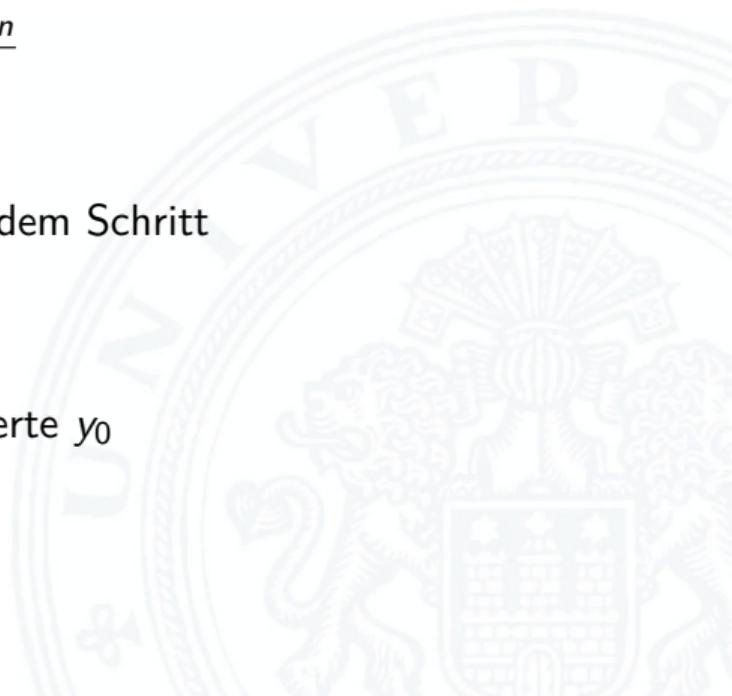
# Quadratwurzel: Heron-Verfahren für $\sqrt{x}$

## Babylonisches Wurzelziehen

- ▶ Sukzessive Approximation von  $y = \sqrt{x}$  gemäß

$$y_{n+1} = \frac{y_n + x/y_n}{2}$$

- ▶ quadratische Konvergenz in der Nähe der Lösung
- ▶ Anzahl der gültigen Stellen verdoppelt sich mit jedem Schritt
  
- ▶ aber langsame Konvergenz fernab der Lösung
- ▶ Lookup-Tabelle und Tricks für brauchbare Startwerte  $y_0$





Welche mathematischen Eigenschaften gelten bei der Informationsverarbeitung / in der gewählten Repräsentation?

Beispiele:

▶ Gilt  $x^2 \geq 0$ ?

- ▶ float: ja
- ▶ signed integer: nein

▶ Gilt  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ?

- ▶ integer: ja
- ▶ float: nein

$$1.0E20 + (-1.0E20 + 3.14) = 0$$





## unsigned Arithmetik

- ▶ Wortbreite auf  $w$  begrenzt
- ▶ kommutative Gruppe / Abel'sche Gruppe
  - ▶ Abgeschlossenheit  $0 \leq a \oplus_w^u b \leq 2^w - 1$
  - ▶ Kommutativgesetz  $a \oplus_w^u b = b \oplus_w^u a$
  - ▶ Assoziativgesetz  $a \oplus_w^u (b \oplus_w^u c) = (a \oplus_w^u b) \oplus_w^u c$
  - ▶ neutrales Element  $a \oplus_w^u 0 = a$
  - ▶ Inverses  $a \oplus_w^u \bar{a} = 0; \bar{a} = 2^w - a$



## signed Arithmetik

## 2-Komplement

- ▶ Wortbreite auf  $w$  begrenzt
- ▶ signed und unsigned Addition sind auf Bit-Ebene identisch

$$a \oplus_w^s b = U2S(S2U(a) \oplus_w^u S2U(b))$$

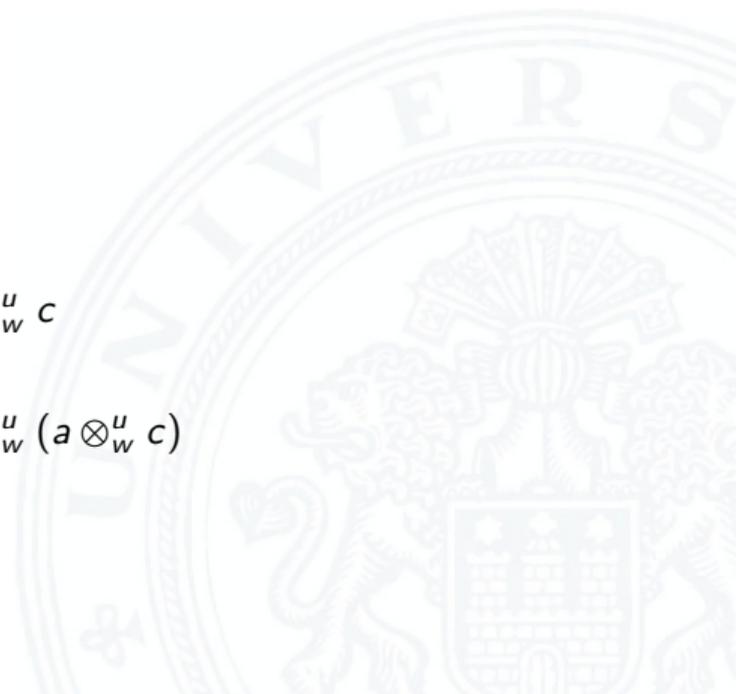
⇒ isomorphe Algebra zu  $\oplus_w^u$

- ▶ kommutative Gruppe / Abel'sche Gruppe
  - ▶ Abgeschlossenheit  $-2^{w-1} \leq a \oplus_w^s b \leq 2^{w-1} - 1$
  - ▶ Kommutativgesetz  $a \oplus_w^s b = b \oplus_w^s a$
  - ▶ Assoziativgesetz  $a \oplus_w^s (b \oplus_w^s c) = (a \oplus_w^s b) \oplus_w^s c$
  - ▶ neutrales Element  $a \oplus_w^s 0 = a$
  - ▶ Inverses  $a \oplus_w^s \bar{a} = 0; \quad \bar{a} = -a, a \neq -2^{w-1}$   
 $a, a = -2^{w-1}$



## unsigned Arithmetik

- ▶ Wortbreite auf  $w$  begrenzt
- ▶ Modulo-Arithmetik  $a \otimes_w^u b = (a \cdot b) \bmod 2^w$
- ▶  $\otimes_w^u$  und  $\oplus_w^u$  bilden einen kommutativen Ring
  - ▶  $\oplus_w^u$  ist eine kommutative Gruppe
  - ▶ Abgeschlossenheit  $0 \leq a \otimes_w^u b \leq 2^w - 1$
  - ▶ Kommutativgesetz  $a \otimes_w^u b = b \otimes_w^u a$
  - ▶ Assoziativgesetz  $a \otimes_w^u (b \otimes_w^u c) = (a \otimes_w^u b) \otimes_w^u c$
  - ▶ neutrales Element  $a \otimes_w^u 1 = a$
  - ▶ Distributivgesetz  $a \otimes_w^u (b \oplus_w^u c) = (a \otimes_w^u b) \oplus_w^u (a \otimes_w^u c)$





## signed Arithmetik

- ▶ signed und unsigned Multiplikation sind auf Bit-Ebene identisch
- ▶ ...

## isomorphe Algebren

- ▶ unsigned Addition und Multiplikation; Wortbreite  $w$
- ▶ signed Addition und Multiplikation; Wortbreite  $w$
- ▶ isomorph zum Ring der ganzen Zahlen *modulo*  $2^w$
  
- ▶ Ordnungsrelation im Ring der ganzen Zahlen
  - ▶  $a > 0 \quad \longrightarrow \quad a + b > b$
  - ▶  $a > 0, b > 0 \longrightarrow a \cdot b > 0$
  - ▶ diese Relationen **gelten nicht** bei Rechnerarithmetik!

2-Komplement

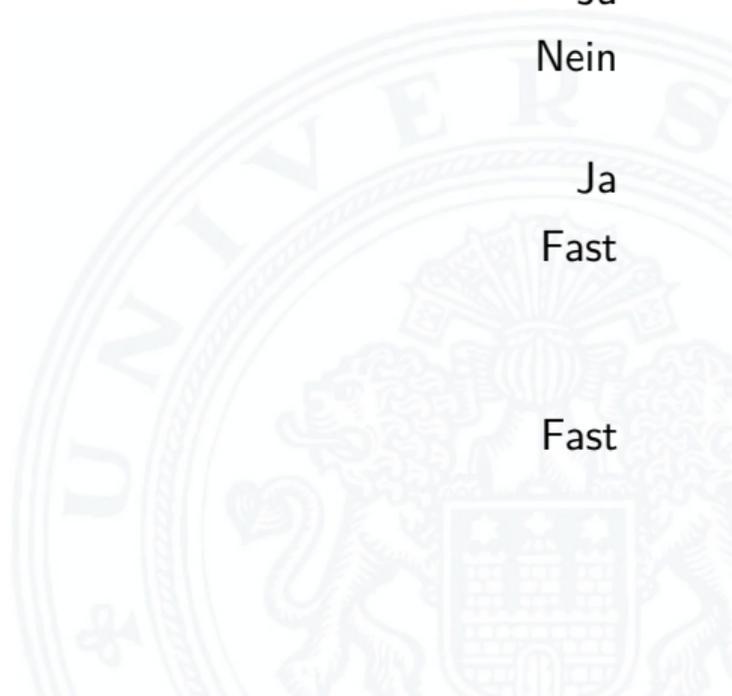
Überlauf



# Gleitkomma Addition

## Vergleich mit kommutativer Gruppe

- ▶ Abgeschlossen? Ja
- ▶ Kommutativ? Ja
- ▶ Assoziativ? Nein  
(Überlauf, Rundungsfehler)
- ▶ Null ist neutrales Element? Ja
- ▶ Inverses Element existiert? Fast  
(außer für NaN und Infinity)
  
- ▶ Monotonie?  $a \geq b \longrightarrow (a + c) \geq (b + c)$   
(außer für NaN und Infinity) Fast

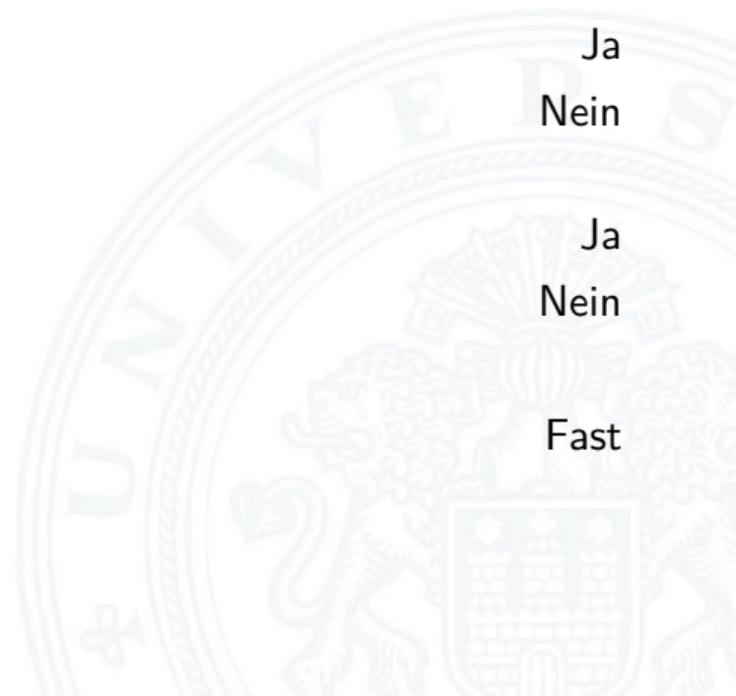




# Gleitkomma Multiplikation

## Vergleich mit kommutativem Ring

- ▶ Abgeschlossen? Ja  
(aber Infinity oder NaN möglich)
- ▶ Kommutativ? Ja
- ▶ Assoziativ? Nein  
(Überlauf, Rundungsfehler)
- ▶ Eins ist neutrales Element? Ja
- ▶ Distributivgesetz? Nein
  
- ▶ Monotonie?  $a \geq b; c \geq 0 \longrightarrow (a \cdot c) \geq (b \cdot c)$  Fast  
(außer für NaN und Infinity)





- [BO15] R.E. Bryant, D.R. O'Hallaron:  
*Computer systems – A programmers perspective.*  
3rd global ed., Pearson Education Ltd., 2015. ISBN 978-1-292-10176-7  
[csapp.cs.cmu.edu](http://csapp.cs.cmu.edu)
- [TA14] A.S. Tanenbaum, T. Austin:  
*Rechnerarchitektur – Von der digitalen Logik zum Parallelrechner.*  
6. Auflage, Pearson Deutschland GmbH, 2014. ISBN 978-3-86894-238-5
- [Kor16] Laszlo Korte: *TAMS Tools for eLearning.*  
Uni Hamburg, FB Informatik, 2016, BSc Thesis.  
[tams.informatik.uni-hamburg.de/research/software/tams-tools](http://tams.informatik.uni-hamburg.de/research/software/tams-tools)



[Omo94] A.R. Omondi: *Computer Arithmetic Systems – Algorithms, Architecture and Implementations*.  
Prentice-Hall International, 1994.

ISBN 978-0-13-334301-4

[Kor01] I. Koren: *Computer Arithmetic Algorithms*.  
2nd edition, CRC Press, 2001.  
[www.ecs.umass.edu/ece/koren/arith](http://www.ecs.umass.edu/ece/koren/arith)

ISBN 978-1-568-81160-4

[Spa76] O. Spaniol: *Arithmetik in Rechenanlagen*.  
B. G. Teubner, 1976.

ISBN 978-3-519-02332-6

