Aufgabenblatt 7 Ausgabe: 16.12., Abgabe: 06.01. 24:00

Gruppe	
Name(n)	Matrikelnummer(n)

Aufgabe 7.1 (Punkte 5+5+10+5+5+5 +10)

Ein einfacher Code: Wir wollen über eine Leitung Nachrichten übertragen, die in drei Bits d_1, d_2, d_3 codiert sind. Weil wir befürchten, dass dabei Fehler auftreten können, erzeugen wir ein Codewort $(c_i, i = 1 \ldots 6) = (d_1 d_2 d_3 p_1 p_2 p_3)$ indem wir noch drei Kontrollbits anfügen, die sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} p_1 &= d_2 \oplus d_3 \\ p_2 &= d_1 \oplus d_3 \\ p_3 &= d_1 \oplus d_2 \end{aligned}$$

(a) Erstellen Sie eine Liste aller 8 möglichen 6-bit Worte des dadurch gewonnenen Codes.

(b) Welchen Hamming-Abstand hat dieser Code? Wie viele Fehler können mit dem Code erkannt bzw. korrigiert werden?

(c) Fehler modellieren wir so, dass wir uns vorstellen, dass bei einem korrekten Codewort $(c_i, i = 1 \ldots 6)$ ein Fehlervektor $(e_i, i = 1 \ldots 6)$ wirkt. Für $e_i = 1$ tritt ein Fehler an der entsprechenden Codewortstelle c_i auf. Natürlich können auch alle $e_i = 0$ sein, nämlich wenn kein Fehler auftritt. Beim Empfänger kommt also nicht der Vektor (c_i) an, sondern ein Vektor $(b_i) = (c_i \oplus e_i)$. Daraus wird ein Fehlersyndrom s_i berechnet als

$$\begin{aligned} s_1 &= b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \\ s_2 &= b_1 \oplus b_3 \oplus b_5 \\ s_3 &= b_1 \oplus b_2 \oplus b_6 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} s_1 &= e_2 \oplus e_3 \oplus e_4 \\ s_2 &= e_1 \oplus e_3 \oplus e_5 \\ s_3 &= e_1 \oplus e_2 \oplus e_6 \end{aligned}$$

(d) Welche Werte s_i erhalten Sie, wenn kein Fehler bei der Übertragung aufgetreten ist?

(e) Welchen Wert haben die s_i, falls nur das Bit b_1 fehlerhaft ist? Welche Werte haben die s_i, falls genau eins der anderen Bits fehlerhaft ist? Sie sollten also eine Tabelle erhalten, die sagt, welchen Wert der Vektor (s_i) hat, wenn im Bit b_k (und nur dort!) ein Fehler aufgetreten ist.

(f) Was lässt sich schließen, falls Sie $s = (1, 1, 1)$ erhalten?

(g) optionale Zusatzpunkte
Decodieren Sie folgende vier Vektoren (b_i), ggf. sind dabei Übertragungsfehler zu korrigieren: $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1, 1, 1)$ und $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Aufgabe 7.2 (Punkte 15+15)

Kanonische Formen: Die beiden folgenden Funktionen einer 3-bit Variablen $x = (x_2, x_1, x_0)$ sind in der kanonischen DNF, der kanonischen KNF und der Reed-Muller Form zu notieren.

(a) $f_a(x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2} \vee x_1) \wedge (\overline{x_1} \vee x_0)$

(b) $f_b(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2} \oplus \overline{x_1}$

Aufgabe 7.3 (Punkte 5+10+5+5+10)

KV-Diagramme: Gegeben sei die folgende Schaltfunktion $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$

(a) Übertragen Sie die Funktion f in ein KV-Diagramm. Verwenden Sie dabei die in der Vorlesung verwendete Anordnung der Variablen (s.u.).

(b) Bestimmen Sie aus dem KV-Diagramm die disjunktive Minimalform und die konjunktive Minimalform von f.

(c) Ersetzen Sie im KV-Diagramm zwei der Einsen durch Don't-Cares, so dass sich die konjunktive Minimalform weiter vereinfacht und bestimmen Sie diese.

(d) Schreiben Sie die disjunktive Minimalform zu Ihrer Lösung aus (c) auf.

(e) Wie lautet die Reed-Muller Form der ursprünglichen Funktion f.

x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Variablenanordnung in den KV-Diagrammen:

$x_3 x_2$ \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_3 x_2$ \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010