Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

64-040 Vorlesung RSB
Kapitel 6: Logische Operationen

Norman Hendrich

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2025/2026

Gliederung

Logische Operationen
- Boole'sche Algebra
- Boole'sche Operationen
- Bitweise logische Operationen
- Schiebeoperationen
- Anwendungsbeispiele
- Literatur

Boole'sche Algebra

- George Boole, 1850: Untersuchung von logischen Aussagen mit den Werten *true* (wahr) und *false* (falsch)
- Definition einer Algebra mit diesen Werten

- drei grundlegende Funktionen: Schreibweisen:
  - NEGATION (NOT) $\neg a$, $\overline{a}$, ~a
  - UND $a \wedge b$, $a \,\&\, b$
  - ODER $a \vee b$, $a \mid b$
  - XOR $a \oplus b$, $a \,\hat{}\, b$

- Claude Shannon, 1937: Realisierung der Boole'schen Algebra mit Schaltfunktionen (binäre digitale Logik)

Grundverknüpfungen

- zwei Werte: *wahr* (*true*, 1) und *falsch* (*false*, 0)
- drei grundlegende Verknüpfungen:

NOT(x)

x	
0	1
1	0

AND(x,y)

x \ y	0	1
0	0	0
1	0	1

OR(x,y)

x \ y	0	1
0	0	1
1	1	1

XOR(x,y)

x \ y	0	1
0	0	1
1	1	0

- alle logischen Operationen lassen sich mit diesen Funktionen darstellen

$\Rightarrow$ *vollständige Basismenge*

Boole'sche Funktionen

- insgesamt 4 Funktionen mit einer Variablen:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= 0 \\
f_1(x) &= 1 \\
f_2(x) &= x \\
f_3(x) &= \neg x
\end{aligned}
$$

- insgesamt 16 Funktionen zweier Variablen (s. nächste Folie)
- allgemein 2^{2^n} Funktionen von n Variablen

(bei n Variablen gibt es 2^n mögliche Eingangsbelegungen,
für jede Belegung gibt es zwei mögliche Funktionswerte.)

Boole'sche Funktionen (2 Variablen)

x =	0	1	0	1				
y =	0	0	1	1	**Bezeichnung**	**Notation**	**alternativ**	**Java / C**
	0	0	0	0	Nullfunktion	0		`0`
	0	0	0	1	AND	$x \cap y$	$x \wedge y$	`x && y`
	0	0	1	0	Inhibition	$x < y$		`x < y`
	0	0	1	1	Identität y	y		`y`
	0	1	0	0	Inhibition	$x > y$		`x > y`
	0	1	0	1	Identität x	x		`x`
	0	1	1	0	Antivalenz/XOR	$x \neq y$	$x \oplus y$	`x != y`
	0	1	1	1	OR	$x \cup y$	$x \vee y$	`x || y`
	1	0	0	0	NOR	$\neg(x \cup y)$	$\overline{x \vee y}$	`!(x || y)`
	1	0	0	1	Äquivalenz/XNOR	$x = y$	$\overline{(x \oplus y)}$	`x == y`
	1	0	1	0	NICHT x	$\neg x$	$\overline{x}$	`!x`
	1	0	1	1	Implikation	$x \leq y$	$x \rightarrow y$	`x <= y`
	1	1	0	0	NICHT y	$\neg y$	$\overline{y}$	`!y`
	1	1	0	1	Implikation	$x \geq y$	$x \leftarrow y$	`x >= y`
	1	1	1	0	NAND	$\neg(x \cap y)$	$\overline{x \wedge y}$	`!(x && y)`
	1	1	1	1	Einsfunktion	1		`1`

Boole'sche Algebra: formale Definition

- 6-Tupel $\langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, \; 0,1 \rangle$ bildet eine Algebra

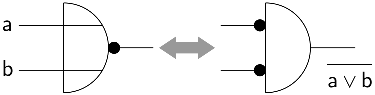
- $\{0,1\}$ Menge mit zwei Elementen
- $\vee$ ist die „Addition“
- $\wedge$ ist die „Multiplikation“
- $\neg$ ist das „Komplement“ (nicht das Inverse!)
- 0 (false) ist das Nullelement der Addition
- 1 (true) ist das Einselement der Multiplikation

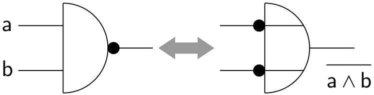
Rechenregeln: Ring / Algebra

Eigenschaft	Ring der ganzen Zahlen	Boole'sche Algebra
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$a \vee b = b \vee a$
	$a \cdot b = b \cdot a$	$a \wedge b = b \wedge a$
Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
Distributivgesetz	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Identitäten	$a + 0 = a$	$a \vee 0 = a$
	$a \cdot 1 = a$	$a \wedge 1 = a$
Vernichtung	$a \cdot 0 = 0$	$a \wedge 0 = 0$
Auslöschung	$-(-a) = a$	$\neg(\neg a) = a$
Inverses	$a + (-a) = 0$	—
Distributivgesetz	—	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Komplement	—	$a \vee \neg a = 1$
	—	$a \wedge \neg a = 0$
Idempotenz	—	$a \vee a = a$
	—	$a \wedge a = a$
Absorption	—	$a \vee (a \wedge b) = a$
	—	$a \wedge (a \vee b) = a$
De Morgan Regeln	—	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
	—	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

De Morgan Regeln

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \qquad\qquad \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$





1. Ersetzen von *UND* durch *ODER* und umgekehrt $\Rightarrow$ Austausch der Funktion
2. Invertieren aller Ein- und Ausgänge

Verwendung

- bei der Minimierung logischer Ausdrücke
- beim Entwurf von Schaltungen

- siehe spätere Kapitel *Schaltfunktionen* und *Schaltnetze*

XOR: Exklusiv-Oder / Antivalenz

- „entweder a oder b" (ausschließlich), bzw. „a ungleich b" $\Rightarrow$ Antivalenz

  XOR(x,y)

x \ y	0	1
0	0	1
1	1	0

- $a \oplus b = (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$
  genau einer von den Termen a und b ist wahr
- $a \oplus b = (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b) = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$
  entweder a ist wahr oder b ist wahr, aber nicht beide gleichzeitig

- $a \oplus a = 0$

Logische Operationen in Java und C

- Datentyp für Boole'sche Logik
  - Java: Datentyp `boolean`
  - C: implizit für alle Integertypen

- Vergleichsoperationen
- Logische Grundoperationen
- Bitweise logische Operationen: parallele Berechnung auf Integer-Datentypen

- Auswertungsreihenfolge
  - (explizite) Klammerung
  - Operatorprioritäten
  - Auswertung von links nach rechts

Vergleichsoperationen

- Vergleich zweier Zahlen, Ergebnis ist logischer Wert
- Java: Integerwerte alle im Zweierkomplement
  C: Auswertung berücksichtigt signed/unsigned-Typen

a == b	wahr, wenn *a* gleich *b*
a != b	wahr, wenn *a* ungleich *b*
a >= b	wahr, wenn *a* größer oder gleich *b*
a > b	wahr, wenn *a* größer *b*
a < b	wahr, wenn *a* kleiner *b*
a <= b	wahr, wenn *a* kleiner oder gleich *b*

Logische Operationen in C

- drei **logische** Operatoren:

`!`	logische Negation
`&&`	logisches UND
`||`	logisches ODER

- Interpretation der Integerwerte:
  der Zahlenwert *0* $\Leftrightarrow$ logische 0 (false)
  alle anderen Werte $\Leftrightarrow$ logische 1 (true)

$\Rightarrow$ andere Semantik als in der Mathematik

$\Rightarrow$ andere Funktion als die bitweisen Operationen (s.u.)

Logische Operationen in C: Beispiele

- `(a > 3)`
- `(x && 13UL)`
- `(a > b) || ((b != c) && (b <= d))`
Ausdruck	Wert
`0x41`	`0x01`
`!0x41`	`0x00`
`!0x00`	`0x01`
`!!0x00`	`0x00`
`0x69 && 0x55`	`0x01`
`0x69 || 0x55`	`0x01`

Logische Operationen in C: verkürzte Auswertung

- logische Ausdrücke werden von links nach rechts ausgewertet
- Klammern werden natürlich berücksichtigt
- Abbruch, sobald der Wert eindeutig feststeht (*shortcut*)
- Vor- oder Nachteile möglich (codeabhängig)
  - + `(a && 5/a)` niemals Division durch Null.
    Der Quotient wird nur berechnet, wenn der linke Term ungleich Null ist
  - + `(p && *p++)` niemals Nullpointer-Zugriff.
    Der Pointer wird nur verwendet, wenn `p` nicht Null ist

Ternärer Operator

- ⟨*condition*⟩ `?` ⟨*true-expression*⟩ `:` ⟨*false-expression*⟩
- Beispiel: `(x < 0) ? -x : x` Absolutwert von x

Logische Operationen in Java

- Java definiert eigenen Datentyp `boolean`
- elementare Werte `false` und `true`
- alternativ `Boolean.FALSE` und `Boolean.TRUE`
- **keine** Mischung mit Integer-Werten wie in C

- Vergleichsoperatoren <, <=, ==, !=, >, >=
- verkürzte Auswertung von links nach rechts (*shortcut*)

Ternärer Operator

- ⟨*condition*⟩ `?` ⟨*true-expression*⟩ `:` ⟨*false-expression*⟩
- Beispiel: `(x < 0) ? -x : x` Absolutwert von x

Bitweise logische Operationen

Integer-Datentypen doppelt genutzt:

1. Zahlenwerte (Ganzzahl, Zweierkomplement, Gleitkomma)

   arithmetische Operationen: Addition, Subtraktion usw.

2. Binärwerte mit w einzelnen Bits (Wortbreite w)

   Boole'sche Verknüpfungen, bitweise auf allen w Bits
   - Grundoperationen: Negation, UND, ODER, XOR
   - Schiebe-Operationen: shift-left, rotate-right usw.

Bitweise logische Operationen

- Integer-Datentypen interpretiert als Menge von Bits

⇒ bitweise logische Operationen möglich

- in Java und C sind vier Operationen definiert:

Negation	`~x`	Invertieren aller einzelnen Bits		
UND	`x&y`	Logisches UND		aller einzelnen Bits
OR	`x|y`	–"–	ODER	–"–
XOR	`x^y`	–"–	XOR	–"–

- alle anderen Funktionen können damit dargestellt werden

Bitweise logische Operationen: Beispiel

`x`	=	`0010 1110`	
`y`	=	`1011 0011`	
`~x`	=	`1101 0001`	alle Bits invertiert
`~y`	=	`0100 1100`	alle Bits invertiert
`x & y`	=	`0010 0010`	bitweises UND
`x | y`	=	`1011 1111`	bitweises ODER
`x ^ y`	=	`1001 1101`	bitweises XOR

Logische Operationen in C: Logisch vs. Bitweise

- der Zahlenwert *0* ⇔ logische 0 (false)
  alle anderen Werte ⇔ logische 1 (true)

- Beispiel: `x = 0x66` und `y = 0x93`

bitweise Operation		logische Operation	
Ausdruck	Wert	Ausdruck	Wert
`x`	`0110 0110`	`x`	`0000 0001`
`y`	`1001 0011`	`y`	`0000 0001`
`x & y`	`0000 0010`	`x && y`	`0000 0001`
`x | y`	`1111 0111`	`x || y`	`0000 0001`
`~x | ~y`	`1111 1101`	`!x || !y`	`0000 0000`
`x & ~y`	`0110 0100`	`x && !y`	`0000 0000`

Schiebeoperationen

- Ergänzung der bitweisen logischen Operationen
- für alle Integer-Datentypen verfügbar

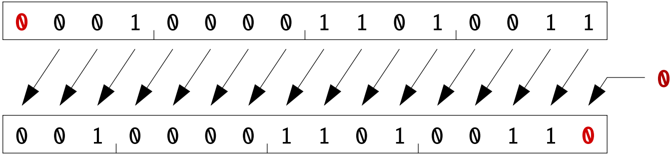
- fünf Varianten

Shift-Left	`shl`
Logical Shift-Right	`srl`
Arithmetic Shift-Right	`sra`
Rotate-Left	`rol`
Rotate-Right	`ror`

- Schiebeoperationen in Hardware leicht zu realisieren
- auf fast allen Prozessoren im Befehlssatz

Shift-Left (shl)

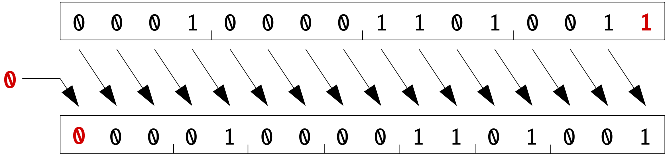
- Verschieben der Binärdarstellung von x um n bits nach links
- links herausgeschobene n bits gehen verloren
- von rechts werden n Nullen eingefügt



- in Java und C direkt als Operator verfügbar: `x << n`
- `shl` um n bits entspricht der Multiplikation mit 2^n

Logical Shift-Right (`srl`)

- Verschieben der Binärdarstellung von x um n bits nach rechts
- rechts herausgeschobene n bits gehen verloren
- von links werden n Nullen eingefügt



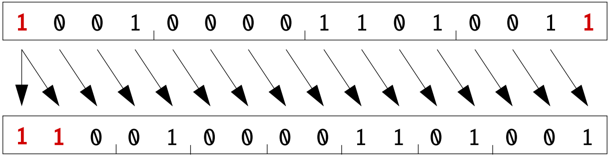
- in Java direkt als Operator verfügbar: `x >>> n`

  in C nur für `unsigned`-Typen definiert: `x >> n`

  für `signed`-Typen nicht vorhanden

Arithmetic Shift-Right (`sra`)

- Verschieben der Binärdarstellung von x um n bits nach rechts
- rechts herausgeschobene n bits gehen verloren
- von links wird n-mal das MSB (Vorzeichenbit) eingefügt
- Vorzeichen bleibt dabei erhalten (gemäß Zweierkomplement)

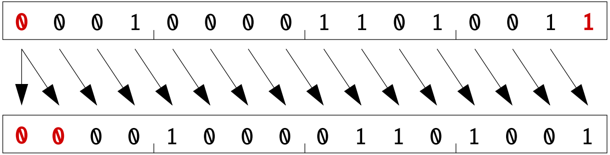


- in Java direkt als Operator verfügbar: `x >> n`

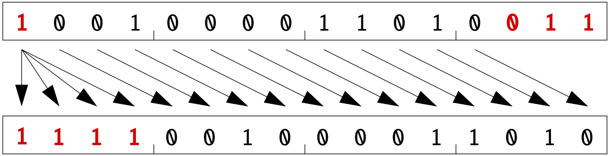
  in C nur für `signed`-Typen definiert: `x >> n`
- `sra` um n bits ist ähnlich der Division durch 2^n

Arithmetic Shift-Right: Beispiel

- `x >> 1` aus `0x10D3` (4 307) wird `0x0869` (2 153)



- `x >> 3` aus `0x90D3` (-28 460) wird `0xF21A` (-3 558)



Arithmetic Shift-Right: Division durch Zweierpotenzen?

- positive Werte: `x >> n` entspricht Division durch 2^n
- negative Werte: `x >> n` ähnlich Division durch 2^n, aber Ergebnis ist zu klein!

- gerundet in Richtung negativer Werte statt in Richtung Null:

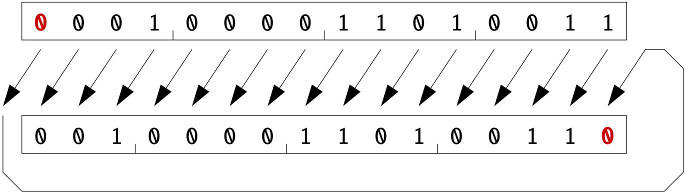
  1111 1011 (-5)
  1111 1101 (-3)
  1111 1110 (-2)
  1111 1111 (-1)

- in C: Kompensation durch Berechnung von `(x + (1<<k)-1) >> k`

  Details: Bryant, O'Hallaron [1]

Rotate-Left (`rol`)

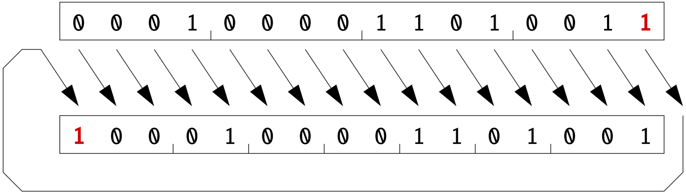
- Rotation der Binärdarstellung von x um n bits nach links
- herausgeschobene Bits werden von rechts wieder eingefügt



- in Java und C nicht als Operator verfügbar
- Java: `Integer.rotateLeft( int x, int distance )`

Rotate Right (`ror`)

- Rotation der Binärdarstellung von x um n bits nach rechts
- herausgeschobene Bits werden von links wieder eingefügt



- in Java und C nicht als Operator verfügbar
- Java: `Integer.rotateRight( int x, int distance )`

Shifts statt Integer-Multiplikation

- Integer-Multiplikation ist auf vielen Prozessoren langsam oder evtl. gar nicht als Befehl verfügbar

- Addition/Subtraktion und logische Operationen: typisch 1 Takt
  Shift-Operationen: meistens 1 Takt

⇒ Trick: Multiplikation mit Konstanten ersetzen durch Kombination aus shifts+add

- Beispiel: $9 \cdot x = (8 + 1) \cdot x$ ersetzt durch `(x << 3) + x`
- viele Compiler erkennen solche Situationen

Beispiel: bit-set, bit-clear

Bits an Position p in einem Integer setzen oder löschen?

- Maske erstellen, die genau eine 1 gesetzt hat
- dies leistet `(1 << p)`, mit $0 \leq p \leq w$ bei Wortbreite w

```
public int bit_set( int x, int pos ) {
  return x |  (1 << pos);      // mask = 0...010...0
}

public int bit_clear( int x, int pos ) {
  return x & ~(1 << pos);      // mask = 1...101...1
}
```

Beispiel: Byte-Swapping *network to/from host*

Linux: `/usr/include/bits/byteswap.h` (distributionsabhängig)

```
...
/* Swap bytes in 32 bit value.  */
#define __bswap_32(x) \
  ((((x) & 0xff000000) >> 24) | (((x) & 0x00ff0000) >>  8) |\
   (((x) & 0x0000ff00) <<  8) | (((x) & 0x000000ff) << 24))
...
```

Linux: `/usr/include/netinet/in.h`

```
...
#  if __BYTE_ORDER == __LITTLE_ENDIAN
#   define ntohl(x) __bswap_32 (x)
#   define ntohs(x) __bswap_16 (x)
#   define htonl(x) __bswap_32 (x)
#   define htons(x) __bswap_16 (x)
#  endif
...
```

Beispiel: RGB-Format für Farbbilder

Farbdarstellung am Monitor / Bildverarbeitung?

- Matrix aus $w \times h$ Bildpunkten
- additive Farbmischung aus Rot, Grün, Blau
- pro Farbkanal typischerweise 8-bit, Wertebereich $0 \dots 255$
- Abstufungen ausreichend für (untrainiertes) Auge

- je ein 32-bit Integer pro Bildpunkt
- typisch: `0x00RRGGBB` oder `0xAARRGGBB`
- je 8-bit für Alpha/Transparenz, rot, grün, blau

- `java.awt.image.BufferedImage(TYPE_INT_ARGB)`

Beispiel: RGB-Rotfilter


```java
public BufferedImage redFilter( BufferedImage src ) {
  int     w = src.getWidth();
  int     h = src.getHeight();
  int type = BufferedImage.TYPE_INT_ARGB;
  BufferedImage dest = new BufferedImage( w, h, type );

  for( int y=0; y < h; y++ ) {         // alle Zeilen
    for( int x=0; x < w; x++ ) {       // von links nach rechts
      int  rgb = src.getRGB( x, y ); // Pixelwert bei (x,y)
                                     // rgb = 0xAARRGGBB
      int  red = (rgb & 0x00FF0000); // Rotanteil maskiert
      dest.setRGB( x, y, red );
    }
  }
  return dest;
}
```

Beispiel: RGB-Graufilter


```
public BufferedImage grayFilter( BufferedImage src ) {
  ...
  for( int y=0; y < h; y++ ) {   // alle Zeilen
    for( int x=0; x < w; x++ ) { // von links nach rechts
      int   rgb = src.getRGB( x, y );       // Pixelwert
      int   red = (rgb & 0x00FF0000) >>>16; // Rotanteil
      int green = (rgb & 0x0000FF00) >>> 8; // Grünanteil
      int  blue = (rgb & 0x000000FF);       // Blauanteil

      int  gray = (red + green + blue) / 3; // Mittelung

      dest.setRGB( x, y, (gray<<16)|(gray<<8)|gray );
    }
  }
  ...
}
```

Beispiel: Bitcount – while-Schleife

Anzahl der gesetzten Bits in einem Wort?

- Anwendung z.B. für Kryptalgorithmen (Hamming-Abstand)
- Anwendung für Medienverarbeitung

```
public static int bitCount( int x ) {
  int count = 0;

  while( x != 0 ) {
    count += (x & 0x00000001);  // unterstes bit addieren
    x = x >>> 1;                // 1-bit rechts-schieben
  }

  return count;
}
```

Beispiel: Bitcount – parallel, tree

- Algorithmus mit Schleife ist einfach aber langsam
- schnelle parallele Berechnung ist möglich

```
int bitCount(unsigned int u)
{ unsigned int uCount;
  uCount = u - ((u >> 1) & 033333333333)
             - ((u >> 2) & 011111111111);
  return ((uCount + (uCount >> 3)) & 030707070707) % 63;
}
```

- `java.lang.Integer.bitCount()`

Beispiel: Bitcount – parallel, tree (cont.)


```
public static int bitCount(int i) {
    // HD, Figure 5-2
    i = i - ((i >>> 1) & 0x55555555);
    i = (i & 0x33333333) + ((i >>> 2) & 0x33333333);
    i = (i + (i >>> 4)) & 0x0f0f0f0f;
    i = i + (i >>> 8);
    i = i + (i >>> 16);
    return i & 0x3f;
}
```

- viele Algorithmen: bit-Maskierung und Schieben
  - `gurmeet.net/puzzles/fast-bit-counting-routines`
  - `graphics.stanford.edu/~seander/bithacks.html`
  - `tekpool.wordpress.com/category/bit-count`
  - D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming*: Volume 4A, Combinational Algorithms: Part1, Abschnitt 7.1.3 [2]
- viele neuere Prozessoren/DSPs: eigener bitcount-Befehl

Tipps & Tricks: Rightmost bits
D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming*, Vol 4.1 [2]

Grundidee: am weitesten rechts stehenden 1-Bits / 1-Bit Folgen erzeugen Überträge in arithmetischen Operationen

- Integer x, mit $x = (\alpha\, 0\, [1]^a\, 1\, [0]^b)_2$

  beliebiger Bitstring α, eine Null, dann $a+1$ Einsen und b Nullen, mit $a,b \geq 0$
- Ausnahmen: $x = -2^b$ und $x = 0$

$$
\Rightarrow \quad \begin{aligned}
x &= (\alpha\, 0\, [1]^a\, 1\, [0]^b)_2 \\
\overline{x} &= (\overline{\alpha}\, 1\, [0]^a\, 0\, [1]^b)_2 \\
x - 1 &= (\alpha\, 0\, [1]^a\, 0\, [1]^b)_2 \\
-x &= (\overline{\alpha}\, 1\, [0]^a\, 1\, [0]^b)_2
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \overline{x} + 1 = -x = \overline{x - 1}$$

Tipps & Tricks: Rightmost bits (cont.)
D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming*, Vol 4.1 [2]

$$x = (\alpha\, 0\, [1]^a\, 1\, [0]^b)_2 \qquad \overline{x} = (\overline{\alpha}\, 1\, [0]^a\, 0\, [1]^b)_2$$
$$x - 1 = (\alpha\, 0\, [1]^a\, 0\, [1]^b)_2 \qquad -x = (\overline{\alpha}\, 1\, [0]^a\, 1\, [0]^b)_2$$

- Tricks mit (bitweisen) logischen Operationen

$$\begin{aligned}
x \& (x-1) &= (\alpha\ \ 0[1]^a 0[0]^b)_2 && \text{letzte 1 entfernt} \\
x \& -x &= (0^\infty 0[0]^a 1[0]^b)_2 && \text{letzte 1 extrahiert} \\
x \mid -x &= (1^\infty 1[1]^a 1[0]^b)_2 && \text{letzte 1 nach links verschmiert} \\
x \oplus -x &= (1^\infty 1[1]^a 0[0]^b)_2 && \text{letzte 1 entfernt und verschmiert} \\
x \mid (x-1) &= (\alpha\ \ 0[1]^a 1[1]^b)_2 && \text{letzte 1 nach rechts verschmiert} \\
\overline{x} \& (x-1) &= (0^\infty 0[0]^a 0[1]^b)_2 && \text{letzte 1 nach rechts verschmiert} \\
((x \mid (x-1)) + 1) \& x &= (\alpha\ \ 0[0]^a 0[0]^b)_2 && \text{letzte 1-Bit Folge entfernt}
\end{aligned}$$

Literatur

[1] Randal E. Bryant and David R. O'Hallaron.
Computer systems – A programmers perspective.
Pearson Education Limited, Harlow, third, global ed. edition, 2015.

[2] Donald Ervin Knuth.
The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 1, Bitwise Tricks & Techniques; Binary Decision Diagrams.
Addison-Wesley Professional, Reading, MA, 2009.

[3] Andrew S. Tanenbaum and Todd Austin.
Rechnerarchitektur – Von der digitalen Logik zum Parallelrechner.
Pearson Deutschland GmbH, Hallbergmoos, sixth edition, 2014.