Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

64-040 Vorlesung RSB
Kapitel 3: Zahlen

Norman Hendrich

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2025/2026

Gliederung

Konzept der Zahl

„Das Messen ist der Ursprung der Zahl als Abstraktion der Anzahl von Objekten die man abzählen kann. . . “ [?]

Abstraktion zum:

- Zählen
- Speichern
- Rechnen

Eigenschaften eines Zahlensystems

- Zahlenbereich: kleinste und größte darstellbare Zahl?
- Darstellung negativer Werte?
- –"– gebrochener Werte?
- –"– sehr großer Werte?

- Unterstützung von Rechenoperationen?
  Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division etc.
- Abgeschlossenheit unter diesen Operationen?

- Methode zur dauerhaften Speicherung/Archivierung?
- Sicherheit gegen Manipulation gespeicherter Werte?

Abstraktion: Verschiedene Symbole für eine Zahl

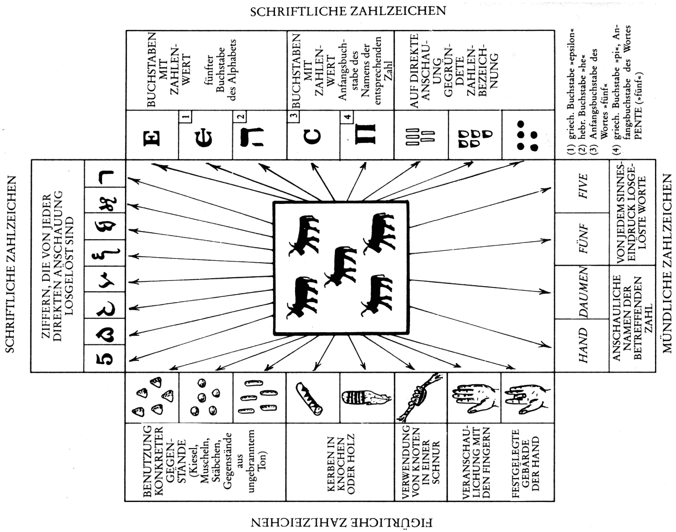


Abb. 11: Verschiedene, einer ganzen Zahl (hier der Zahl 5) zugeordnete Symbole.

[?]

Zählen mit den Fingern („digits“)

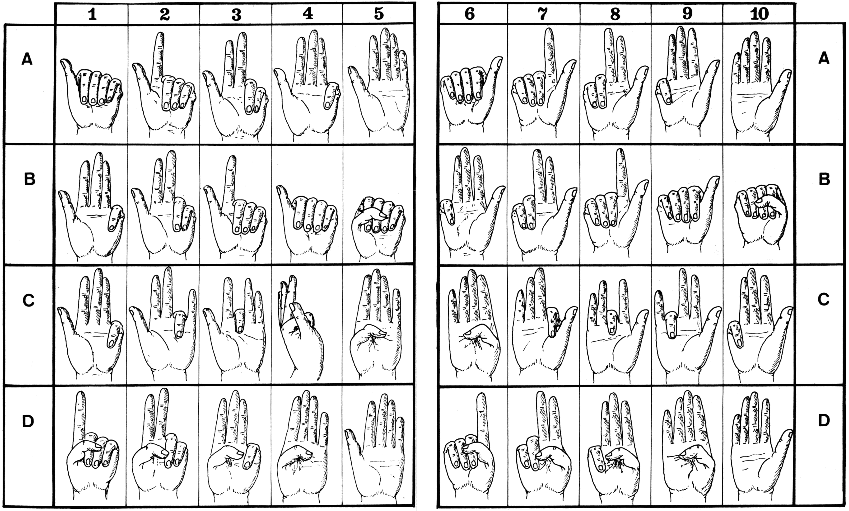


Abb. 12: Verschiedene Möglichkeiten des Zählens mit den Fingern.

[?]

Tonbörse: 15. Jh. v. Chr.

Gegenstände, Hammel und Ziegen betreffend
21 Mutterschafe
6 weibliche Lämmer
8 erwachsene Hammel
4 männliche Lämmer
6 Mutterziegen
1 Bock
(2) Jungziegen

Abb. 3: Eiförmige Tonbörse (46 mm × 62 mm × 50 mm), entdeckt in den Ruinen des Palastes von Nuzi (mesopotamische Stadt; ca. 15. Jh. v. Chr.). (Harvard Semitic Museum, Cambridge. Katalognummer SMN 1854)

Kerbhölzer

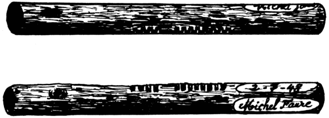


Abb. 58: Kerbhölzer aus Bäckereien in Frankreich, wie sie in kleinen Ortschaften auf dem Lande üblich waren.

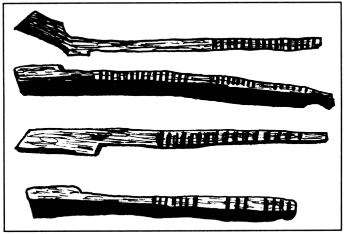
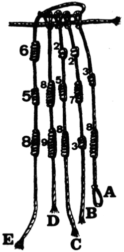


Abb. 59: Englische Kerbhölzer aus dem 13. Jahrhundert. (Sammlung Society of Antiquaries, London; Zeichnung nach Menninger 1957/58, II, 42)

Knotenschnüre [?]



658	89	258	273	38
E	D	C	B	A

Abb. 66: Interpretation eines quipu: Die Zahl 658 auf der Schnur E ist gleich der Summe der Zahlen auf den Schnüren A, B, C und D. Dieses Bündel ist das erste an einem peruanischen quipu. (American Museum of Natural History, New York, B 8713; vgl. Leland Locke 1923)

Rechnen: Römische Ziffern

- Ziffern: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000
- Werte eins bis zehn: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
- Position der Ziffern ist signifikant:
  - nach Größe der Ziffernsymbole sortiert, größere stehen links
  - andernfalls Abziehen der kleineren von der größeren Ziffer
  - IV=4, VI=6, XL=40, LXX=70, CM=900
- heute noch in Gebrauch: Jahreszahlen, Seitennummern usw.
  Beispiele: MDCCCXIII=1813, MMXXIV=2024

– keine Symbole zur Darstellung großer Zahlen

– Rechenoperationen so gut wie unmöglich

Babylon: Sexagesimalsystem

- vor ungefähr 4 000 Jahren, erstes **Stellenwertsystem**
- Basis 60
- zwei Symbole: | = 1 und < = 10
  Einritzen gerader und gewinkelter Striche auf Tontafeln
- Null bekannt: wird nicht mitgeschrieben, Leerzeichen zwischen zwei Stellen

- Beispiele
  - ||||| 5
  - <<||| 23
  - | <<< $90 = 1 \cdot 60 + 3 \cdot 10$
  - | <<| $3\,621 = 1 \cdot 3\,600 + 0 \cdot 60 + 2 \cdot 10 + 1$

- für Zeitangaben und Winkeleinteilung heute noch in Gebrauch

Dezimalsystem

$$\begin{array}{cccccccccccc} \text{Stelle:} & & \text{100er} & \text{10er} & \text{1er} & & \text{0,1er} & \text{0,01er} & \text{0,001er} & & \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ d_{n-1} & \dots & d_2 & d_1 & d_0 & \mathbf{,} & d_{-1} & d_{-2} & d_{-3} & \dots & d_{-m} \end{array}$$

$$Zahl = \sum_{i=-m}^{n-1} d_i \cdot 10^i \qquad d_i \in \{0, \dots, 9\}$$

- das im Alltag gebräuchliche Zahlensystem
- n Vorkommastellen: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender . . .
  m Nachkommastellen: Zehntel, Hundertstel, Tausendstel . . .

Stellenwertsystem („Radixdarstellung“)

- Wahl einer geeigneten Zahlenbasis b („Radix“)
  - 10: Dezimalsystem
  - 16: Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem)
  - 2: Dualsystem
- Menge der entsprechenden Ziffern $\{0, 1, \ldots, b-1\}$
- inklusive einer besonderen Ziffer für den Wert Null
- Auswahl der benötigten Anzahl n von Stellen

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

b Basis a_i Koeffizient an Stelle i

- universell verwendbar, für beliebig große Zahlen

Dualsystem

- Stellenwertsystem zur Basis 2
- braucht für gegebene Zahl ca. dreimal mehr Stellen als Basis 10
- für Menschen daher unbequem
  besser Oktal- oder Hexadezimalschreibweise, s.u.

- technisch besonders leicht zu implementieren weil nur zwei Zustände unterschieden werden müssen

  z.B. zwei Spannungen, Ströme, Beleuchtungsstärken

+ robust gegen Rauschen und Störungen
+ einfache und effiziente Realisierung von Arithmetik

Dualsystem: Potenztabelle

Stelle	Wert im Dualsystem	Wert im Dezimalsystem
2^0	1	1
2^1	10	2
2^2	100	4
2^3	1000	8
2^4	1 0000	16
2^5	10 0000	32
2^6	100 0000	64
2^7	1000 0000	128
2^8	1 0000 0000	256
2^9	10 0000 0000	512
2^{10}	100 0000 0000	1 024
2^{11}	1000 0000 0000	2 048
2^{12}	1 0000 0000 0000	4 096

Dualsystem: Beispiele

- Basis 2
- Zeichensatz ist $\{0, 1\}$
- Beispiele

$$\begin{aligned} 0_2 &= 0_{10} \\ 1_2 &= 1_{10} \\ 11_2 &= 3_{10} && 2^1 + 2^0 \\ 11\,0100_2 &= 52_{10} && 2^5 + 2^4 + 2^2 \\ 1111\,1110_2 &= 254_{10} && 2^8 + 2^7 + \ldots + 2^2 + 2^1 \end{aligned}$$

Addition im Dualsystem

- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- Addition mehrstelliger Zahlen erfolgt stellenweise
- Additionsmatrix

$$
\begin{array}{c|cc}
+ & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 10
\end{array}
$$

- Beispiel

$$
\begin{array}{rr}
 & 1011\,0011 \\
+ & 0011\,1001 \\
\hline
\text{Ü} & 11\;\;11 \\
\hline\hline
 & 1110\,1100
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
= & 179 \\
= & 57 \\
\hline
 & 11 \\
\hline\hline
= & 236
\end{array}
$$

Multiplikation im Dualsystem

- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- $p = a \cdot b$ mit Multiplikator a und Multiplikand b
- Multiplikation von a mit je einer Stelle des Multiplikanten b
- Addition der Teilterme

- Multiplikationsmatrix – sehr einfach: $\cdot 0$ / $\cdot 1$

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Multiplikation im Dualsystem (cont.)

- Beispiel

$$
\begin{array}{rrrl}
 & 10110011 & \cdot\ 1101 & = 179 \cdot 13 \quad = 2327 \\
\hline
 & 10110011 & 1 & \quad\quad\quad\quad\quad\ \ = 1001\,0001\,0111 \\
 & 10110011 & 1 & \quad\quad\quad\quad\quad\ \ = 0x917 \\
 & 00000000 & 0 & \\
 & 10110011 & 1 & \\
\hline
\text{Ü} & 11101111 & & \\
\hline\hline
 & 100100010111 & &
\end{array}
$$

Oktalsystem

- Basis 8
- Zeichensatz ist $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- C-Schreibweise mit führender 0 als Präfix:
  - $$\begin{aligned} 0001 &= 1_{10} \\ 0013 &= 11_{10} = 1 \cdot 8 + 3 \\ 0375 &= 253_{10} = 3 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 5 \end{aligned}$$
    usw.

  $\Rightarrow$ Fehler: Dezimalzahl in C mit 0 beginnen!
- für Menschen leichter lesbar als Dualzahlen
- Umwandlung aus/vom Dualsystem durch Zusammenfassen bzw. Ausschreiben von je drei Bits

  $$\begin{array}{llll} 00 = 000 & 01 = 001 & 02 = 010 & 03 = 011 \\ 04 = 100 & 05 = 101 & 06 = 110 & 07 = 111 \end{array}$$

Hexadezimalsystem

- Basis 16
- Zeichensatz ist $\{0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$
- C-Schreibweise mit Präfix 0x – Klein- oder Großbuchstaben
  - 0x00000001 $= 1_{10}$
    0x000000fe $= 254_{10} = 15 \cdot 16 + 14$
    0x0000ffff $= 65\,535_{10} = 15 \cdot 4\,096 + 15 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 15$
    0xcafebabe $= \dots$ erstes Wort in Java Class-Dateien
    usw.
- viel leichter lesbar als entsprechende Dualzahl
- Umwandlung aus/vom Dualsystem durch Zusammenfassen bzw. Ausschreiben von je vier Bits

0x0 = 0000	0x1 = 0001	0x2 = 0010	0x3 = 0011
0x4 = 0100	0x5 = 0101	0x6 = 0110	0x7 = 0111
0x8 = 1000	0x9 = 1001	0xA = 1010	0xB = 1011
0xC = 1100	0xD = 1101	0xE = 1110	0xF = 1111

Beispiel: Darstellungen der Zahl 2024

Binär

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1\cdot 2^{10} & +1\cdot 2^9 & +1\cdot 2^8 & +1\cdot 2^7 & +1\cdot 2^6 & +1\cdot 2^5 & +0\cdot 2^4 & +1\cdot 2^3 & +0\cdot 2^2 & +0\cdot 2^1 & +0\cdot 2^0 \\
1\,024 & +\ 512 & +\ 256 & +\ 128 & +\ 64 & +\ 32 & +\ 0 & +\ 8 & +\ 0 & +\ 0 & +\ 0
\end{array}$$

Oktal

$$\begin{array}{cccc}
3 & 7 & 5 & 0 \\
3\cdot 8^3 & +7\cdot 8^2 & +5\cdot 8^1 & +0\cdot 8^0 \\
1\,536 & +\ 448 & +\ 40 & +\ 0
\end{array}$$

Dezimal

$$\begin{array}{cccc}
2 & 0 & 2 & 4 \\
2\cdot 10^3 & +0\cdot 10^2 & +2\cdot 10^1 & +4\cdot 10^0 \\
2\,000 & +\ 0 & +\ 20 & +\ 4
\end{array}$$

Hexadezimal

$$\begin{array}{ccc}
7 & E & 8 \\
7\cdot 16^2 & +E\cdot 16^1 & +8\cdot 16^0 \\
1\,792 & +\ 224 & +\ 8
\end{array}$$

Umrechnung Dual-/Oktal-/Hexadezimalsystem

- Beispiele

Hexadezimal	1 9 4 8 . B 6
Binär	0001 1001 0100 1000 . 1011 0110 0
Oktal	1 4 5 1 0 . 5 5 4

Hexadezimal	7 B A 3 . B C 4
Binär	0111 1011 1010 0011 . 1011 1100 0100
Oktal	7 5 6 4 3 . 5 7 0 4

- Gruppieren von jeweils 3 bzw. 4 Bits
- bei Festkomma vom Dezimalpunkt aus nach
  links (2^n) für Vorkommastellen
  rechts (2^{-m}) für Nachkommastellen

Umrechnung zwischen verschiedenen Basen

- Menschen rechnen im Dezimalsystem
- Winkel- und Zeitangaben auch im Sexagesimalsystem — Basis: 60
- Digitalrechner nutzen (meistens) Dualsystem

- Algorithmen zur Umrechnung notwendig
- Exemplarisch Vorstellung von drei Varianten:

  1. vorberechnete Potenztabellen
  2. Divisionsrestverfahren
  3. Horner-Schema

Umwandlung über Potenztabellen

Vorgehensweise für Integerzahlen

1.a Subtraktion des größten Vielfachen einer Potenz des Zielsystems von der umzuwandelnden Zahl, dabei vorberechnete Potenztabelle benutzen

1.b Notation dieses größten Vielfachen (im Zielsystem)

- Schritte wiederholen solange der der Rest der Zahl $\neq 0$

2.a Subtraktion des größten Vielfachen vom verbliebenen Rest

2.b Addition dieses Vielfachen (im Zielsystem)

... usw.

Potenztabellen Dual/Dezimal

Stelle_2	Wert_{10}
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1 024
2^{11}	2 048
2^{12}	4 096

Stelle_{10}	Wert_2
10^0	1
10^1	1010
10^2	110 0100
10^3	11 1110 1000
10^4	10 0111 0001 0000
10^5	0x1 86 A0
10^6	0xF 42 40
10^7	0x98 96 80
10^8	0x5 F5 E1 00
10^9	0x3B 9A CA 00
10^{10}	0x2 54 0B E4 00
10^{11}	0x17 48 76 E8 00
10^{12}	0xE8 D4 A5 10 00

Potenztabellen: Beispiel

- Umwandlung Dezimal- in Dualzahl

$$Z = (163)_{10} \leftrightarrow (1010\,0011)_2$$

$$\begin{array}{rccr}
163 & & & \\
-\ 128 & 2^7 & & 1000\,0000 \\
\hline
35 & & & \\
-\ \ 32 & 2^5 & + & 10\,0000 \\
\hline
3 & & & \\
-\ \ \ 2 & 2^1 & + & 10 \\
\hline
1 & & & \\
-\ \ \ 1 & 2^0 & + & 1 \\
\hline
0 & & & 1010\,0011
\end{array}$$

Potenztabellen: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1010\,0011)_2 \leftrightarrow (163)_{10}$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 1010\,0011 & & \\
- & 110\,0100 & 1 \cdot 10^2 & 100 \\
\hline
 & 0011\,1111 & & \\
- & 11\,1100 & 6 \cdot 10^1 & + \;\; 60 \\
\hline
 & 11 & & \\
- & 11 & 3 \cdot 10^0 & + \;\;\; 3 \\
\hline
 & 0 & & 163
\end{array}
$$

Potenztabellen: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1010\,0011)_2 \leftrightarrow (163)_{10}$

$$
\begin{array}{rrcr}
 & 1010\,0011 & & \\
- & 110\,0100 & 1 \cdot 10^2 & 100 \\
\hline
 & 0011\,1111 & & \\
- & 11\,1100 & 6 \cdot 10^1 & +\ \ 60 \\
\hline
 & 11 & & \\
- & 11 & 3 \cdot 10^0 & +\ \ \ 3 \\
\hline
 & 0 & & 163
\end{array}
$$

einfacher: Aufsummieren der Potenzen

$$
\begin{array}{l}
1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
128 + 0 + 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 163
\end{array}
$$

Divisionsrestverfahren

- Division der umzuwandelnden Zahl im Ausgangssystem durch die Basis des Zielsystems
- Erneute Division des ganzzahligen Ergebnisses (ohne Rest) durch die Basis des Zielsystems, bis kein ganzzahliger Divisionsrest mehr bleibt
- Beispiel

$$\begin{array}{rcl} 163 : 2 = 81 & \text{Rest } 1 & 2^0 \\ 81 : 2 = 40 & \text{Rest } 1 & \vdots \\ 40 : 2 = 20 & \text{Rest } 0 & \\ 20 : 2 = 10 & \text{Rest } 0 & \\ 10 : 2 = 5 & \text{Rest } 0 & \\ 5 : 2 = 2 & \text{Rest } 1 & \uparrow \text{ Leserichtung} \\ 2 : 2 = 1 & \text{Rest } 0 & \vdots \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1 & 2^7 \end{array}$$

$$(163)_{10} \leftrightarrow (1010\,0011)_2$$

Divisionsrestverfahren: Beispiel

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1010\,0011)_2 \leftrightarrow (163)_{10}$$

$$\begin{array}{rcrlrl}
(1010\,0011)_2 : (1010)_2 & = & 1\,0000 & \text{Rest} & (11)_2 \,\widehat{=}\, 3 & 10^0 \\
(1\,0000)_2 : (1010)_2 & = & 1 & \text{Rest} & (110)_2 \,\widehat{=}\, 6 & 10^1 \\
(1)_2 : (1010)_2 & = & 0 & \text{Rest} & (1)_2 \,\widehat{=}\, 1 & 10^2
\end{array}$$

Hinweis: Division in Basis b folgt

Divisionsrestverfahren: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dezimal- in Dualzahl

$$Z = (1789)_{10} \leftrightarrow (110\,1111\,1101)_2$$

$$\begin{array}{rcl} 1789 : 2 = 894 & \text{Rest } 1 & 2^0 \\ 894 : 2 = 447 & \text{Rest } 0 & \vdots \\ 447 : 2 = 223 & \text{Rest } 1 & \\ 223 : 2 = 111 & \text{Rest } 1 & \\ 111 : 2 = 55 & \text{Rest } 1 & \\ 55 : 2 = 27 & \text{Rest } 1 & \\ 27 : 2 = 13 & \text{Rest } 1 & \\ 13 : 2 = 6 & \text{Rest } 1 & \\ 6 : 2 = 3 & \text{Rest } 0 & \uparrow \text{ Leserichtung} \\ 3 : 2 = 1 & \text{Rest } 1 & \vdots \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1 & 2^{10} \end{array}$$

Divisionsrestverfahren: Algorithmus

Algorithmus

rechentechnisch

darzustellende Zahl x: 123

Basis q: 2

a := x

while a > 0

y_n := a mod q

a := a div q

end

Takt

n = 1

a = 123

(a > 0) = 1

a mod 2 = 1

a div 2 = 61

0000000000000001

Resultat

K. von der Heide [?]
Interaktives Skript T1
stellen2stellen

Horner-Schema

- Darstellung einer Potenzsumme durch ineinander verschachtelte Faktoren

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i = (\ldots((a_{n-1} \cdot b + a_{n-2}) \cdot b + a_{n-3}) \cdot b + \ldots + a_1) \cdot b + a_0$$

Vorgehensweise:

- Darstellung der umzuwandelnden Zahl im Horner-Schema
- Durchführung der auftretenden Multiplikationen und Additionen im Zielsystem

Horner-Schema: Beispiel

- Umwandlung Dezimal- in Dualzahl
  1. Darstellung als Potenzsumme
     $Z = (163)_{10} = (1 \cdot 10 + 6) \cdot 10 + 3$
  2. Faktoren und Summanden im Zielzahlensystem
     $$\begin{aligned} (10)_{10} &\leftrightarrow (1010)_2 \\ (6)_{10} &\leftrightarrow (110)_2 \\ (3)_{10} &\leftrightarrow (11)_2 \\ (1)_{10} &\leftrightarrow (1)_2 \end{aligned}$$
  3. Arithmetische Operationen
     $$\begin{array}{rrrr} 1 \cdot 1010 = & 1010 & & \\ + & 110 & & \\ \hline & 1\,0000 \cdot 1010 = & 1010\,0000 & \\ & + & 11 & \\ \cline{2-3} & & 1010\,0011 & \end{array}$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl
  1. Darstellung als Potenzsumme
     $Z = (1010\,0011)_2 =$
     $((((((1 \cdot 10_2 + 0) \cdot 10_2 + 1) \cdot 10_2 + 0) \cdot 10_2 + 0) \cdot 10_2 + 0) \cdot 10_2 + 1) \cdot 10_2 + 1$
  2. Faktoren und Summanden im Zielzahlensystem
     $(10)_2 \leftrightarrow (2)_{10}$
     $(1)_2 \leftrightarrow (1)_{10}$
     $(0)_2 \leftrightarrow (0)_{10}$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

3. Arithmetische Operationen

$$
\begin{array}{l}
1 \cdot 2 = 2 \\
\quad + 0 \\
\quad \overline{2} \cdot 2 = 4 \\
\qquad + 1 \\
\qquad \overline{5} \cdot 2 = 10 \\
\qquad\quad + 0 \\
\qquad\quad \overline{10} \cdot 2 = 20 \\
\qquad\qquad + 0 \\
\qquad\qquad \overline{20} \cdot 2 = 40 \\
\qquad\qquad\quad + 0 \\
\qquad\qquad\quad \overline{40} \cdot 2 = 80 \\
\qquad\qquad\qquad + 1 \\
\qquad\qquad\qquad \overline{81} \cdot 2 = 162 \\
\qquad\qquad\qquad\quad + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \overline{163}
\end{array}
$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl
  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  $1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1$

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$

  $0 + 2 \cdot 1 = 2$

  $1 + 2 \cdot 2 = 5$

  $1 + 2 \cdot 5 = 11$

  $1 + 2 \cdot 11 = 23$

  $0 + 2 \cdot 23 = 46$

  $1 + 2 \cdot 46 = 93$

  $1 + 2 \cdot 93 = 187$

  $0 + 2 \cdot 187 = 374$

  $1 + 2 \cdot 374 = 749$

  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl
  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$
  $1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1$
  $1 + 2 \cdot 0 = 1$
  $0 + 2 \cdot 1 = 2$
  $1 + 2 \cdot 2 = 5$
  $1 + 2 \cdot 5 = 11$
  $1 + 2 \cdot 11 = 23$
  $0 + 2 \cdot 23 = 46$
  $1 + 2 \cdot 46 = 93$
  $1 + 2 \cdot 93 = 187$
  $0 + 2 \cdot 187 = 374$
  $1 + 2 \cdot 374 = 749$
  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$
  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  $1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1$

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$

  $0 + 2 \cdot 1 = 2$

  $1 + 2 \cdot 2 = 5$

  $1 + 2 \cdot 5 = 11$

  $1 + 2 \cdot 11 = 23$

  $0 + 2 \cdot 23 = 46$

  $1 + 2 \cdot 46 = 93$

  $1 + 2 \cdot 93 = 187$

  $0 + 2 \cdot 187 = 374$

  $1 + 2 \cdot 374 = 749$

  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  $1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$

  $0 + 2 \cdot 1 = 2$

  $1 + 2 \cdot 2 = 5$

  $1 + 2 \cdot 5 = 11$

  $1 + 2 \cdot 11 = 23$

  $0 + 2 \cdot 23 = 46$

  $1 + 2 \cdot 46 = 93$

  $1 + 2 \cdot 93 = 187$

  $0 + 2 \cdot 187 = 374$

  $1 + 2 \cdot 374 = 749$

  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl
  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  $1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1$

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$

  $0 + 2 \cdot 1 = 2$

  $1 + 2 \cdot 2 = 5$

  $1 + 2 \cdot 5 = 11$

  $1 + 2 \cdot 11 = 23$

  $0 + 2 \cdot 23 = 46$

  $1 + 2 \cdot 46 = 93$

  $1 + 2 \cdot 93 = 187$

  $0 + 2 \cdot 187 = 374$

  $1 + 2 \cdot 374 = 749$

  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  $1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1$

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$

  $0 + 2 \cdot 1 = 2$

  $1 + 2 \cdot 2 = 5$

  $1 + 2 \cdot 5 = 11$

  $1 + 2 \cdot 11 = 23$

  $0 + 2 \cdot 23 = 46$

  $1 + 2 \cdot 46 = 93$

  $1 + 2 \cdot 93 = 187$

  $0 + 2 \cdot 187 = 374$

  $1 + 2 \cdot 374 = 749$

  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl
  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  $1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1$

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$

  $0 + 2 \cdot 1 = 2$

  $1 + 2 \cdot 2 = 5$

  $1 + 2 \cdot 5 = 11$

  $1 + 2 \cdot 11 = 23$

  $0 + 2 \cdot 23 = 46$

  $1 + 2 \cdot 46 = 93$

  $1 + 2 \cdot 93 = 187$

  $0 + 2 \cdot 187 = 374$

  $1 + 2 \cdot 374 = 749$

  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

$1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1$

$1 + 2 \cdot 0 = 1$

$0 + 2 \cdot 1 = 2$

$1 + 2 \cdot 2 = 5$

$1 + 2 \cdot 5 = 11$

$1 + 2 \cdot 11 = 23$

$0 + 2 \cdot 23 = 46$

$1 + 2 \cdot 46 = 93$

$1 + 2 \cdot 93 = 187$

$0 + 2 \cdot 187 = 374$

$1 + 2 \cdot 374 = 749$

$1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

$1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  $1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1$

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$

  $0 + 2 \cdot 1 = 2$

  $1 + 2 \cdot 2 = 5$

  $1 + 2 \cdot 5 = 11$

  $1 + 2 \cdot 11 = 23$

  $0 + 2 \cdot 23 = 46$

  $1 + 2 \cdot 46 = 93$

  $1 + 2 \cdot 93 = 187$

  $0 + 2 \cdot 187 = 374$

  $1 + 2 \cdot 374 = 749$

  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  $1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1$

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$

  $0 + 2 \cdot 1 = 2$

  $1 + 2 \cdot 2 = 5$

  $1 + 2 \cdot 5 = 11$

  $1 + 2 \cdot 11 = 23$

  $0 + 2 \cdot 23 = 46$

  $1 + 2 \cdot 46 = 93$

  $1 + 2 \cdot 93 = 187$

  $0 + 2 \cdot 187 = 374$

  $1 + 2 \cdot 374 = 749$

  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$

  $0 + 2 \cdot 1 = 2$

  $1 + 2 \cdot 2 = 5$

  $1 + 2 \cdot 5 = 11$

  $1 + 2 \cdot 11 = 23$

  $0 + 2 \cdot 23 = 46$

  $1 + 2 \cdot 46 = 93$

  $1 + 2 \cdot 93 = 187$

  $0 + 2 \cdot 187 = 374$

  $1 + 2 \cdot 374 = 749$

  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$

  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl
  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 \leftrightarrow (2\,999)_{10}$

  1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1

  $1 + 2 \cdot 0 = 1$
  $0 + 2 \cdot 1 = 2$
  $1 + 2 \cdot 2 = 5$
  $1 + 2 \cdot 5 = 11$
  $1 + 2 \cdot 11 = 23$
  $0 + 2 \cdot 23 = 46$
  $1 + 2 \cdot 46 = 93$
  $1 + 2 \cdot 93 = 187$
  $0 + 2 \cdot 187 = 374$
  $1 + 2 \cdot 374 = 749$
  $1 + 2 \cdot 749 = 1\,499$
  $1 + 2 \cdot 1\,499 = 2\,999$

Zahlenbereich bei fester Wortlänge

Anzahl der Bits	Zahlenbereich jeweils von 0 bis $(2^n - 1)$		
4-bit	2^4	$=$	16
8-bit	2^8	$=$	256
10-bit	2^{10}	$=$	1 024
12-bit	2^{12}	$=$	4 096
16-bit	2^{16}	$=$	65 536
20-bit	2^{20}	$=$	1 048 576
24-bit	2^{24}	$=$	16 777 216
32-bit	2^{32}	$=$	4 294 967 296
48-bit	2^{48}	$=$	281 474 976 710 656
64-bit	2^{64}	$=$	18 446 744 073 709 551 616

Präfixe

- Präfixangabe als Abkürzung von Zehnerpotenzen für die vereinfachte Schreibweise von großen bzw. sehr kleinen Zahlen
- Beispiele
  - Lichtgeschwindigkeit: $300\,000\,\mathrm{Km/s} = 30\,\mathrm{cm/ns}$
  - Ruheenergie des Elektrons: $0{,}51\,\mathrm{MeV}$
  - Strukturbreite heutiger Mikrochips: $4\,\mathrm{nm}$
  - usw.

- auch für das Dualsystem gibt es entsprechende Präfixe
- Vielfache von $2^{10} = 1024 \approx 1000$

Präfixe für Einheiten im Dezimalsystem

Faktor	Name	Symbol
10^{30}	Quetta	Q
10^{27}	Ronna	R
10^{24}	Yotta	Y
10^{21}	Zetta	Z
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^{9}	Giga	G
10^{6}	Mega	M
10^{3}	Kilo	k
10^{2}	Hekto	h
10^{1}	Deka	da

Faktor	Name	Symbol
10^{-30}	Quekto	q
10^{-27}	Ronto	r
10^{-24}	Yokto	y
10^{-21}	Zepto	z
10^{-18}	Atto	a
10^{-15}	Femto	f
10^{-12}	Piko	p
10^{-9}	Nano	n
10^{-6}	Mikro	μ
10^{-3}	Milli	m
10^{-2}	Zenti	c
10^{-1}	Dezi	d

Präfixe für Einheiten im Dualsystem

Faktor	Name	Symbol	Langname
2^{80}	Yobi	Yi	Yottabinary
2^{70}	Zebi	Zi	Zettabinary
2^{60}	Exbi	Ei	Exabinary
2^{50}	Pebi	Pi	Petabinary
2^{40}	Tebi	Ti	Terabinary
2^{30}	Gibi	Gi	Gigabinary
2^{20}	Mebi	Mi	Megabinary
2^{10}	Kibi	Ki	Kilobinary

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
1\,\text{Kibibit} &= 1\,024\ \text{bit}\\
1\,\text{Kilobit} &= 1\,000\ \text{bit}\\
1\,\text{Mebibit} &= 1\,048\,576\ \text{bit}\\
1\,\text{Gibibit} &= 1\,073\,741\,824\ \text{bit}
\end{aligned}
$$

IEC-60027-2, Letter symbols to be used in electrical technology

Präfixe für Einheiten im Dualsystem (cont.)

- in der Praxis nicht immer sauber verwendet
- meistens ergibt sich die Bedeutung aber aus dem Kontext

- bei Speicherbausteinen sind Zweierpotenzen üblich, es werden aber dezimale Präfixe verwendet
  - DRAM-Modul mit 16 GB Kapazität: gemeint sind 2^{34} Bytes
  - Flash-Speicherkarte 256 GB Kapazität: gemeint sind 2^{38} Bytes

- bei Festplatten wird Kapazität dezimal angegeben
  - Festplatte mit 8 TB Kapazität: typisch $8 \cdot 10^{12}$ Bytes
  - die tatsächliche angezeigte verfügbare Kapazität ist geringer, weil das jeweilige Dateisystem zusätzlichen Platz für die Verwaltungsinformationen belegt

Festkommadarstellung

Darstellung von **gebrochenen Zahlen** als Erweiterung des Stellenwertsystems durch Erweiterung des Laufindex zu negativen Werten:

$$
\begin{aligned}
|z| &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i + \sum_{i=-m}^{i=-1} a_i \cdot b^i \\
&= \sum_{i=-m}^{n-1} a_i \cdot b^i
\end{aligned}
$$

mit $a_i \in N$ und $0 \leq a_i < b$.

- Der erste Summand ist der ganzzahlige Anteil, während der zweite Summand für den gebrochenen Anteil steht: n Vorkomma- und m Nachkommastellen

Nachkommastellen im Dualsystem

- $2^{-1} = 0{,}5$
  $2^{-2} = 0{,}25$
  $2^{-3} = 0{,}125$
  $2^{-4} = 0{,}0625$
  $2^{-5} = 0{,}03125$
  $2^{-6} = 0{,}015625$
  $2^{-7} = 0{,}0078125$
  $2^{-8} = 0{,}00390625$
  $\ldots$
- alle Dualbrüche sind im Dezimalsystem exakt darstellbar (d.h. mit endlicher Wortlänge)
- dies gilt umgekehrt nicht

Nachkommastellen im Dualsystem (cont.)

- gebrochene Zahlen können je nach Wahl der Basis evtl. nur als unendliche periodische Brüche dargestellt werden
- insbesondere erfordern viele endliche Dezimalbrüche im Dualsystem unendliche periodische Brüche
- Beispiel: Dezimalbrüche, eine Nachkommastelle

B=10	B=2
0,1	$0{,}0\overline{0011}$
0,2	$0{,}\overline{0011}$
0,3	$0{,}0\overline{1001}$
0,4	$0{,}\overline{0110}$
0,5	0,1
0,6	$0{,}\overline{1001}$
0,7	$0{,}1\overline{0110}$
0,8	$0{,}\overline{1100}$
0,9	$0{,}1\overline{1100}$

B=2	B=10
0,001	0,125
0,010	0,25
0,011	0,375
0,100	0,5
0,101	0,625
0,110	0,75
0,111	0,875

Potenztabelle zur Umrechnung

- Potenztabelle

$2^{-1} = 0{,}5$	$2^{-7} = 0{,}0078125$
$2^{-2} = 0{,}25$	$2^{-8} = 0{,}00390625$
$2^{-3} = 0{,}125$	$2^{-9} = 0{,}001953125$
$2^{-4} = 0{,}0625$	$2^{-10} = 0{,}0009765625$
$2^{-5} = 0{,}03125$	$2^{-11} = 0{,}00048828125$
$2^{-6} = 0{,}015625$	$2^{-12} = 0{,}000244140625$

- Beispiel: Dezimal 0,3

  Berechnung durch Subtraktion der Werte

$$
\begin{aligned}
(0{,}3)_{10} &= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + \ldots \\
&= 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-9} + \ldots \\
&= (0{,}0\overline{1001})_2
\end{aligned}
$$

Umrechnung: Dezimalbruch nach Dual (cont.)

Divisionsrestverfahren

- statt Division: bei Nachkommastellen Multiplikation $\cdot\, 2$
  - man nimmt den Dezimalbruch immer mit 2 mal
  - Resultat < 1: eine 0 an den Dualbruch anfügen
    –"– ≥ 1: eine 1 –"–
    und den ganzzahligen Anteil streichen: $-1{,}0$
  - Ende, wenn Ergebnis 1,0 (wird zu 0)
    –"– wenn Rest sich wiederholt $\Rightarrow$ Periode
- Beispiel: Dezimal 0,59375

$$
\begin{array}{llll}
2 \cdot 0{,}59375 = 1{,}1875 & \rightarrow 1 & 2^{-1} & \\
2 \cdot 0{,}1875 = 0{,}375 & \rightarrow 0 & \vdots & \\
2 \cdot 0{,}375 = 0{,}75 & \rightarrow 0 & \downarrow & \text{Leserichtung} \\
2 \cdot 0{,}75 = 1{,}5 & \rightarrow 1 & \vdots & \\
2 \cdot 0{,}5 = 1{,}0 & \rightarrow 1 & 2^{-5} &
\end{array}
$$

$(0{,}59375)_{10} \leftrightarrow (0{,}10011)_2$

Darstellung negativer Zahlen

Drei gängige Varianten zur Darstellung negativer Zahlen

1. Betrag und Vorzeichen
2. Exzess-Codierung (Offset-basiert)
3. **Komplementdarstellung**

- Integerrechnung in der Regel im Zweierkomplement
- Gleitkommadarstellung mit Betrag und Vorzeichen
- –"– Exponent als Exzess-Codierung

Betrag und Vorzeichen

- Auswahl eines Bits als Vorzeichenbit
- meistens das MSB (engl. *most significant bit*)
- restliche Bits als Dualzahl interpretiert
- Beispiel für 4-bit Wortbreite:

0000	$+0$	1000	-0
0001	$+1$	1001	-1
0010	$+2$	1010	-2
0011	$+3$	1011	-3
0100	$+4$	1100	-4
0101	$+5$	1101	-5
0110	$+6$	1110	-6
0111	$+7$	1111	-7

– doppelte Codierung der Null: $+0$, -0

– Rechenwerke für Addition/Subtraktion aufwändig

Exzess-Codierung (Offset-basiert)

- einfache Um-Interpretation der Binärcodierung

$$z = c - offset$$

- z vorzeichenbehafteter Wert (Zahlenwert)
- c binäre Ganzzahl (Code)
- beliebig gewählter Offset

– Null wird nicht mehr durch 000 . . . 0 dargestellt

\+ Größenvergleich zweier Zahlen bleibt einfach

- Anwendung: Exponenten im IEEE 754 Gleitkommaformat, einige Audioformate, Ausgaben von A/D-Wandlern . . .

Exzess-Codierung: Beispiele

Bitmuster	Binärcode	Exzess-8	Exzess-6
0000	0	-8	-6
0001	1	-7	-5
0010	2	-6	-4
0011	3	-5	-3
0100	4	-4	-2
0101	5	-3	-1
0110	6	-2	0
0111	7	-1	1
1000	8	0	2
1001	9	1	3
1010	10	2	4
1011	11	3	5
1100	12	4	6
1101	13	5	7
1110	14	6	8
1111	15	7	9

$z = c - offset$

b-Komplement

Definition: das b-**Komplement** einer Zahl z ist

$$\begin{aligned} K_b(z) &= b^n - z, \quad \text{für} \quad z \neq 0 \\ &= 0, \qquad\quad\;\, \text{für} \quad z = 0 \end{aligned}$$

- b: die Basis (des Stellenwertsystems)
- n: Anzahl der zu berücksichtigenden Vorkommastellen
- mit anderen Worten: $K_b(z) + z = b^n$
- Stellenwertschreibweise $\quad z = -a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \sum_{i=-m}^{n-2} a_i \cdot b^i$
- Dualsystem: 2-Komplement
- Dezimalsystem: 10-Komplement

b-Komplement: Beispiele

$$
\begin{array}{llll}
b = 10 & n = 4 & K_{10}(3\,763)_{10} & = 10^4 - 3\,763 & = 6\,237_{10} \\
 & n = 2 & K_{10}(0{,}3763)_{10} & = 10^2 - 0{,}3763 & = 99{,}6237_{10} \\
 & n = 0 & K_{10}(0{,}3763)_{10} & = 10^0 - 0{,}3763 & = 0{,}6237_{10} \\
b = 2 & n = 2 & K_2(10{,}01)_2 & = 2^2 - 10{,}01_2 & = 01{,}11_2 \\
 & n = 8 & K_2(10{,}01)_2 & = 2^8 - 10{,}01_2 & = 1111\,1101{,}11_2
\end{array}
$$

$(b-1)$-Komplement

Definition: das $(b-1)$-**Komplement** einer Zahl z ist

$$K_{b-1}(z) = b^n - z - b^{-m}, \quad \text{für} \quad z \neq 0$$
$$= 0, \quad \text{für} \quad z = 0$$

- b: die Basis des Stellenwertsystems
- n: Anzahl der zu berücksichtigenden Vorkommastellen
- m: Anzahl der Nachkommastellen
- mit anderen Worten: $K_{b-1}(z) + z + b^{-m} = b^n$

- Dualsystem: 1-Komplement
- Dezimalsystem: 9-Komplement

$(b-1)$-Komplement / b-Komplement: Trick

$$K_{b-1}(z) = b^n - b^{-m} - z, \quad \text{für} \quad z \neq 0$$

- im Fall $m = 0$ gilt offenbar $K_b(z) = K_{b-1}(z) + 1$

$\Rightarrow$ das $(b-1)$-Komplement kann sehr einfach berechnet werden: es werden einfach die einzelnen Bits/Ziffern invertiert

- Dualsystem:

	1-Komplement	1100 1001
	alle Bits invertieren	0011 0110

- Dezimalsystem:

	9-Komplement	24 453
	alle Ziffern invertieren	75 546
	$0 \leftrightarrow 9$ $1 \leftrightarrow 8$ $2 \leftrightarrow 7$ $3 \leftrightarrow 6$ $4 \leftrightarrow 5$	
	Summe:	$99\,999 = 100\,000 - 1$

$(b-1)$-Komplement / b-Komplement: Trick (cont.)

⇒ das b-Komplement kann sehr einfach berechnet werden: es werden einfach die einzelnen Bits/Ziffern invertiert und 1, bzw. b^{-m} an der niedrigsten Stelle aufaddiert

▶ Dualsystem:	2-Komplement	1100 1001
	Bits invertieren $+1$	0011 0111
	Summe:	1 0000 0000
▶ Dezimalsystem:	10-Komplement	24 453
	Ziffern invertieren $+1$	75 547
	$0 \leftrightarrow 9$ $1 \leftrightarrow 8$ $2 \leftrightarrow 7$ $3 \leftrightarrow 6$ $4 \leftrightarrow 5$	
	Summe:	100 000

Subtraktion mit b-Komplement

- bei Rechnung mit fester Stellenzahl n gilt:

$$K_b(z) + z = b^n \quad = 0$$

  weil b^n gerade nicht mehr in n Stellen hineinpasst

- also gilt für die Subtraktion auch:

$$x - y = x + K_b(y)$$

$\Rightarrow$ Subtraktion kann durch Addition des b-Komplements ersetzt werden!
Voraussetzung: begrenzte Stellenanzahl

- und für Integerzahlen gilt außerdem

$$x - y = x + K_{b-1}(y) + 1$$

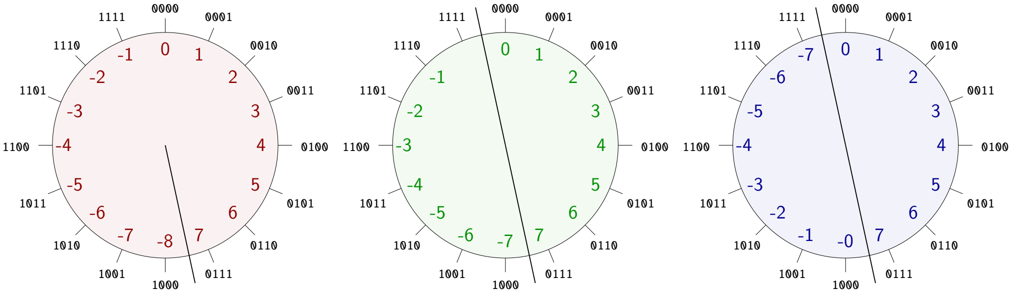
Subtraktion mit Einer- und Zweierkomplement

- Subtraktion ersetzt durch Addition des Komplements

Dezimal	1-Komplement	2-Komplement
10	0000 1010	0000 1010
+(-3)	1111 1100	1111 1101
+7	1 0000 0110	1 0000 0111
Übertrag:	addieren +1	verwerfen
	0000 0111	0000 0111

Veranschaulichung: Zahlenkreis

Beispiel für 4-bit Zahlen



2-Komplement 1-Komplement Betrag+Vorzeichen

MSB $\widehat{=}$ Vorzeichen

- Komplement-Arithmetik als Winkeladdition
- Web-Anwendung: *Visualisierung im Zahlenkreis* (JavaScript, aus [?])

Darstellung negativer Zahlen: Beispiele (8-bit)

N Dezimal	+N Binär	-N VZ+Betrag	-N 1-Komplement	-N 2-Komplement	-N Exzess-128
1	0000 0001	1000 0001	1111 1110	1111 1111	0111 1111
2	0000 0010	1000 0010	1111 1101	1111 1110	0111 1110
3	0000 0011	1000 0011	1111 1100	1111 1101	0111 1101
4	0000 0100	1000 0100	1111 1011	1111 1100	0111 1100
5	0000 0101	1000 0101	1111 1010	1111 1011	0111 1011
6	0000 0110	1000 0110	1111 1001	1111 1010	0111 1010
7	0000 0111	1000 0111	1111 1000	1111 1001	0111 1001
8	0000 1000	1000 1000	1111 0111	1111 1000	0111 1000
9	0000 1001	1000 1001	1111 0110	1111 0111	0111 0111
10	0000 1010	1000 1010	1111 0101	1111 0110	0111 0110
20	0001 0100	1001 0100	1110 1011	1110 1100	0110 1100
30	0001 1110	1001 1110	1110 0001	1110 0010	0110 0010
40	0010 1000	1010 1000	1101 0111	1101 1000	0101 1000
50	0011 0010	1011 0010	1100 1101	1100 1110	0100 1110
60	0011 1100	1011 1100	1100 0011	1100 0100	0100 0100
70	0100 0110	1100 0110	1011 1001	1011 1010	0011 1010
80	0101 0000	1101 0000	1010 1111	1011 0000	0011 0000
90	0101 1010	1101 1010	1010 0101	1010 0110	0010 0110
100	0110 0100	1110 0100	1001 1011	1001 1100	0001 1100
127	0111 1111	1111 1111	1000 0000	1000 0001	0000 0001
128	—	—	—	1000 0000	0000 0000
MSB	0	1	1	1	0

Gleitkommaformat

Wie kann man „wissenschaftliche“ Zahlen darstellen?

- Masse der Sonne $1{,}989 \cdot 10^{30}$ Kg
- Ladung eines Elektrons 0,000 000 000 000 000 000 16 C
- Anzahl der Atome pro Mol 602 300 000 000 000 000 000 000

...

Darstellung im Stellenwertsystem?

- gleichzeitig sehr große und sehr kleine Zahlen notwendig
- entsprechend hohe Zahl der Vorkomma- und Nachkommastellen
- durchaus möglich (Java3D: 256-bit Koordinaten)
- aber normalerweise sehr unpraktisch
- typische Messwerte haben nur ein paar Stellen Genauigkeit

Gleitkomma: Motivation

Grundidee: **halblogarithmische Darstellung einer Zahl**

- Vorzeichen ($+1$ oder -1)
- *Mantisse* als normale Zahl im Stellenwertsystem
- *Exponent* zur Angabe der Größenordnung

$$z = sign \cdot mantisse \cdot basis^{exponent}$$

- handliche Wertebereiche für Mantisse und Exponent
- arithmetische Operationen sind effizient umsetzbar
- Wertebereiche für ausreichende Genauigkeit wählen

  Hinweis: rein logarithmische Darstellung wäre auch möglich, aber Addition und Subtraktion sind dann sehr aufwändig

Gleitkomma: Dezimalsystem

$$z = (-1)^s \cdot m \cdot 10^{\mathrm{e}}$$

- s Vorzeichenbit
- m Mantisse als Festkomma-Dezimalzahl
- e Exponent als ganze Dezimalzahl

- Schreibweise in C/Java: $\langle \mathit{Vorzeichen} \rangle$ $\langle \mathit{Mantisse} \rangle$ `E` $\langle \mathit{Exponent} \rangle$

`6.023E23`	$6{,}023 \cdot 10^{23}$	Avogadro-Zahl
`1.6E-19`	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$	Elementarladung des Elektrons

Gleitkomma: Beispiel für Zahlenbereiche

Stellen		Zahlenbereich	
Mantisse	Exponent	$0 \leftarrow$	$\rightarrow \infty$
3	1	10^{-12}	10^{9}
3	2	10^{-102}	10^{99}
3	3	10^{-1002}	10^{999}
3	4	10^{-10002}	10^{9999}
4	1	10^{-13}	10^{9}
4	2	10^{-103}	10^{99}
4	3	10^{-1003}	10^{999}
4	4	10^{-10003}	10^{9999}
5	1	10^{-14}	10^{9}
5	2	10^{-104}	10^{99}
5	3	10^{-1004}	10^{999}
5	4	10^{-10004}	10^{9999}
10	3	10^{-1009}	10^{999}
20	3	10^{-1019}	10^{999}

normalisierte Zahlen
$\pm\, 0,\langle \mathit{mantisse} \rangle \cdot 10^{\pm \langle \mathit{exponent} \rangle}$

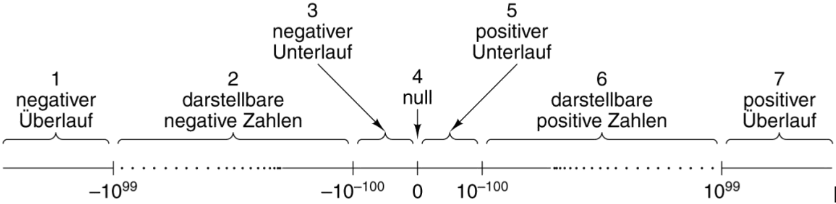
Gleitkomma: Historie

- 1937 Zuse: Z1 mit 22-bit Gleitkomma-Datenformat
- 195x Verbreitung von Gleitkomma-Darstellung für numerische Berechnungen
- 1980 Intel 8087: erster Koprozessor-Chip, ca. 45 000 Transistoren, $\approx$ 50K FLOPS
- 1985 IEEE 754 Standard für Gleitkomma
- 1989 Intel 486 mit integriertem Koprozessor
- 1995 Java-Spezifikation fordert IEEE 754
- 1997 ASCI-RED: 1,1 TFLOPS (7 264 Pentium Pro)
- 2008 Roadrunner: 1,0 PFLOPS (12 240 Cell, 6 120 Opteron)
- 2022 Frontier: 1,1 EFLOPS (37 888 Instinct, 9 472 Epyc)

...

FLOPS := Floating-Point Operations Per Second

Gleitkomma: Zahlenbereiche



[?]

- Darstellung üblicherweise als Betrag+Vorzeichen
- negative und positive Zahlen gleichberechtigt (symmetrisch)
- separate Darstellung für den Wert Null (und *Inf*, *NaN*)
- sieben Zahlenbereiche: siehe Grafik
- relativer Abstand benachbarter Zahlen bleibt ähnlich (vgl. dagegen Integer: 0/1, 1/2, 2/3, . . . , 65 535/65 536, . . .)

Gleitkomma: Normalisierte Darstellung

$$z = (-1)^s \cdot m \cdot 10^e$$

- diese Darstellung ist bisher nicht eindeutig:

  $123 \cdot 10^0 = 12{,}3 \cdot 10^1 = 1{,}23 \cdot 10^2 = 0{,}123 \cdot 10^3 = \quad \ldots$

normalisierte Darstellung

- Exponent anpassen, bis Mantisse im Bereich $1 \leq m < b$ liegt

⇒ Darstellung ist dann eindeutig

⇒ im Dualsystem: erstes Vorkommabit ist dann 1
und muss nicht explizit gespeichert werden

- evtl. zusätzlich sehr kleine Zahlen nicht-normalisiert

IEEE 754 Standard

bis 1985 ein Wildwuchs von Gleitkomma-Formaten:

- unterschiedliche Anzahl Bits in Mantisse und Exponent
- Exponent mit Basis 2, 10 oder 16
- diverse Algorithmen zur Rundung
- jeder Hersteller mit eigener Variante

– Numerische Algorithmen nicht portabel

1985: Publikation des Standards IEEE 754 zur Vereinheitlichung

- klare Regeln, auch für Rundungsoperationen
- große Akzeptanz, mittlerweile der universale Standard
- 2008: IEEE 754-2008 mit 16- und 128-bit Formaten

Details: unter anderem in `en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754` oder in Goldberg [?]

IEEE 754: *float* und *double*

- 32-bit Format: einfache Genauigkeit (*single precision*, *float*)

V	*Exponent*	*Mantisse*	
1	8	23	bit

Exzess-127 Codierung für Exponent

- 64-bit Format: doppelte Genauigkeit (*double precision*, *double*)

V	*Exponent*	*Mantisse*	
1	11	52	bit

Exzess-1023 Codierung für Exponent

-

IEEE 754 Zahl	Exponent	Mantisse
normalisiert	$00\dots001$ bis $11\dots110$	$1 \leq m < 2$ $\quad 1,m$
denormalisiert	$00\dots000$ $\quad (2^{1-exzess})$	$0 < m < 1$ $\quad 0,m$
Null $(+0, -0)$	$00\dots000$	$m = 0$
NaN, Infinity	$11\dots111$	

IEEE 754: Zahlenbereiche

Eigenschaft	einfache	doppelte Genauigkeit
Bits im Vorzeichen	1	1
Bits im Exponenten	8	11
Bits in der Mantisse	23	52
Bits insgesamt	32	64
Exponentensystem	Exzess-127	Exzess-1023
Exponentenbereich	$-126 \dots +127$	$-1022 \dots +1023$
kleinste normalisierte Zahl	2^{-126}	2^{-1022}
größte –"–	$\approx 2^{128}$	$\approx 2^{1024}$
kleinste nicht normalisierte Zahl	$\approx 10^{-45}$	$\approx 10^{-324}$
$\widehat{=}$ Dezimalbereich	$\approx 10^{-38} \dots 10^{38}$	$\approx 10^{-308} \dots 10^{308}$
dezimale Genauigkeit [Stellen]	≈ 7	≈ 16
- Erinnerung: $\log_2(10) = \ln(10)/\ln(2) \approx 3{,}322$

kürzere Zahlenformate

- großer Zahlenbereich gefordert, Genauigkeit weniger wichtig
- Bildverarbeitung (HDR), ML (maschinelles Lernen), ...

+ weniger Speicherbedarf und Rechenleistung, schnellere Datenübertragung

- 16-bit Format: halbe Genauigkeit (*half precision*, *binary16*)

V	*Exponent*	*Mantisse*	Exzess-15 Codierung für Exponent
1	5	10	bit

- *bfloat16*

V	*Exponent*	*Mantisse*	Exzess-127 Codierung für Exponent
1	8	7	bit

- ... viele weitere Minifloat-Formate, sogar 8-bit

Beispiele: float

- 1-bit Vorzeichen 8-bit Exponent (Exzess-127), 23-bit Mantisse

  $$z = (-1)^s \cdot 2^{(eeee\,eeee-127)} \cdot 1{,}mmmm\,mmmm\,mmmm \ldots mmm$$

- 1 1000 0000 1110 0000 0000 0000 0000 000

  $$z = -1 \cdot 2^{(128-127)} \cdot (1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0)$$
  $$= -1 \cdot 2 \cdot 1{,}875 = -3{,}750$$

- 0 1111 1110 0001 0011 0000 0000 0000 000

  $$z = +1 \cdot 2^{(254-127)} \cdot (1 + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8})$$
  $$= 2^{127} \cdot 1{,}07421875 = 1{,}8276885 \cdot 10^{38}$$

Beispiele: float (cont.)

$$z = (-1)^s \cdot 2^{(eeee\,eeee-127)} \cdot 1{,}mmmm\,mmmm\,mmmm\ldots mmm$$

- 1 0000 0001 0000 0000 0000 0000 0000 000

$$z = -1 \cdot 2^{(1-127)} \cdot (1 + 0 + 0 + \ldots + 0)$$
$$= -1 \cdot 2^{-126} \cdot 1{,}0 = -1{,}17549435 \cdot 10^{-38}$$

- 0 0111 1111 0000 0000 0000 0000 0000 001

$$z = +1 \cdot 2^{(127-127)} \cdot (1 + 2^{-23})$$
$$= 1 \cdot (1 + 0{,}00000012) = 1{,}00000012$$

Gleitkomma: Addition, Subtraktion

Addition von Gleitkommazahlen $y = a_1 + a_2$

- Skalierung des betragsmäßig kleineren Summanden
- Erhöhen des Exponenten, bis $e_1 = e_2$ gilt
- gleichzeitig entsprechendes Skalieren der Mantisse $\Rightarrow$ schieben
- Achtung: dabei verringert sich die effektive Genauigkeit des kleineren Summanden

- anschließend Addition/Subtraktion der Mantissen
- ggf. Normalisierung des Resultats

- Beispiele in den Übungen

Gleitkomma-Addition: Beispiel

$a = 9{,}725 \cdot 10^7 \quad b = 3{,}016 \cdot 10^6$

$$
\begin{aligned}
y &= (a + b) \\
&= (9{,}725 \cdot 10^7 + 0{,}3016 \cdot 10^7) && \text{Angleichung der Exponenten} \\
&= (9{,}725 + 0{,}3016) \cdot 10^7 && \text{Distributivgesetz} \\
&= (10{,}0266) \cdot 10^7 && \text{Addition der Mantissen} \\
&= 1{,}00266 \cdot 10^8 && \text{Normalisierung} \\
\\
&= 1{,}003 \cdot 10^8 && \text{Runden bei fester Stellenzahl}
\end{aligned}
$$

- normalerweise nicht informationstreu

Probleme bei Subtraktion/Addition zweier Gleitkommazahlen

Fall 1 Exponenten stark unterschiedlich

- kleinere Zahl wird soweit skaliert, dass von der Mantisse (fast) keine gültigen Bits übrigbleiben
- kleinere Zahl geht verloren, bzw. Ergebnis ist sehr ungenau
- Beispiel: `1.0E20 + 3.14159` = `1.0E20`

Fall 2 Exponenten gleich, Mantissen unterscheiden sich nur in einigen, wenig signifikanten Stellen

- fast alle Bits der Mantisse löschen sich aus
- Resultat hat nur noch wenige Bits effektiver Genauigkeit

Gleitkomma: Multiplikation, Division

Multiplikation von Gleitkommazahlen $y = a_1 \cdot a_2$

- Multiplikation der Mantissen und Vorzeichen

  Vorzeichen s_i ist hier -1^{sBit}

  Anmerkung: Berechnung $sBit = sBit_1$ XOR $sBit_2$
- Addition der Exponenten
- ggf. Normalisierung des Resultats

$$y = (s_1 \oplus s_2) \cdot (m_1 \cdot m_2) \cdot b^{e_1 + e_2}$$

Division entsprechend:

- Division der Mantissen und Vorzeichen
- Subtraktion der Exponenten
- ggf. Normalisierung des Resultats

$$y = (s_1 \oplus s_2) \cdot (m_1 / m_2) \cdot b^{e_1 - e_2}$$

IEEE 754: Infinity Inf, Not-a-Number NaN, ± 0

- schnelle Verarbeitung großer Datenmengen
- Statusabfrage nach jeder einzelnen Operation unbequem
- trotzdem Hinweis auf aufgetretene Probleme wichtig

$\Rightarrow$ Inf (*infinity*): spezieller Wert für plus/minus Unendlich
Beispiele: $2/0$, $-3/0$ usw.

$\Rightarrow$ NaN (*not-a-number*): spezieller Wert für ungültige Operation
Beispiele: $\sqrt{-1}$, $\arcsin(2)$, Inf/Inf usw.

IEEE 754: Infinity Inf, Not-a-Number NaN, ± 0 (cont.)

normalisiert	V	$0 < Exp < Max$	jedes Bitmuster
denormalisiert	V	`00...0`	jedes Bitmuster $\neq$ `00...0`
0	V	`00...0`	`00...0`
Inf	V	`11...1`	`00...0`
NaN	V	`11...1`	jedes Bitmuster $\neq$ `00...0`

- Rechnen mit Inf funktioniert normal: $0/Inf = 0$
- NaN für undefinierte Werte: sqrt(-1), arcsin(2.0) ...
- jede Operation mit NaN liefert wieder NaN

IEEE 754: Infinity Inf, Not-a-Number NaN, ± 0 (cont.)

- Beispiele

```
 0 / 0                  = NaN
 1 / 0                  = Infinity
-1 / 0                  = -Infinity
 1 / Infinity           = 0.0
Infinity + Infinity     = Infinity
Infinity + -Infinity    = NaN
Infinity * -Infinity    = -Infinity
Infinity + NaN          = NaN
Infinity * 0            = NaN
sqrt(2)                 = 1.4142135623730951
sqrt(-1)                = NaN
0 + NaN                 = NaN
NaN == NaN              = false                 Achtung!
Infinity > NaN          = false
```

ULP: Unit in the last place

- die Differenz zwischen den beiden Gleitkommazahlen, die einer gegebenen Zahl am nächsten liegen
- diese beiden Werte unterscheiden sich im niederwertigsten Bit der Mantisse

$\Rightarrow$ Wertigkeit des LSB

$\Rightarrow$ Maß für die erreichbare Genauigkeit

- IEEE 754 fordert eine Genauigkeit von 0,5 ULP für die elementaren Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Quadratwurzel
  $=$ der bestmögliche Wert
- gute Mathematik-Software garantiert ≤ 1 ULP auch für höhere Funktionen: Logarithmus, Sinus, Cosinus usw.
- Programmiersprachenunterstützung, z.B. `java.lang.Math.ulp( double d )`

Rundungsfehler

- sorgfältige Behandlung von Rundungsfehlern essenziell
- teilweise Berechnung mit zusätzlichen Schutzstellen
- dadurch Genauigkeit ± 1 ULP für alle Funktionen
- mathematisch komplexes Thema

- in dieser Vorlesung nicht weiter vertieft
- beim Einsatz von numerischen Algorithmen essenziell

Datentypen in der Praxis: Maschinenworte

- die meisten Rechner sind für eine Wortlänge optimiert
- 8-bit, 16-bit, 32-bit, 64-bit . . . Maschinen
- die jeweils typische Länge eines Integerwertes
- und meistens auch von Speicheradressen
- zusätzlich Teile oder Vielfache der Wortlänge unterstützt

- 32-bit Rechner
  - Wortlänge für Integerwerte ist 32-bit
  - adressierbarer Speicher ist 2^{32} Bytes (4 GiB)
  - bereits zu knapp für speicherhungrige Applikationen
- inzwischen sind 64-bit Rechner bei PCs/Laptops Standard
- kleinere Wortbreiten: *embedded*-Systeme (Steuerungsrechner), Mobilgeräte etc.

Datentypen auf Maschinenebene

- gängige Prozessoren unterstützen mehrere Datentypen
- entsprechend der elementaren Datentypen in C, Java ...
- `void*` ist ein **Pointer** (Referenz, Speicheradresse)
- Beispiel für die Anzahl der Bytes:

C Datentyp	DEC Alpha	typ. 32-bit	Intel IA-32 (x86)
int	4	4	4
long int	8	4	4
char	1	1	1
short	2	2	2
float	4	4	4
double	8	8	8
long double	8	8	10/12
void *	8	4	4

Datentypen auf Maschinenebene (cont.)

Abhängigkeiten (!)

- Prozessor
- Betriebssystem
- Compiler

segment word size	16 bit			32 bit						64 bit			
compiler	Microsoft	Borland	Watcom	Microsoft	Intel Windows	Borland	Watcom	Gnu, Clang	Intel Linux	Microsoft	Intel Windows	Gnu, Clang	Intel Linux
bool	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
char	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
wchar_t		2		2	2	2	2	2	2	2	2	4	4
short int	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
int	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
long int	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	8	8
int64_t				8	8			8	8	8	8	8	8
enum (typical)	2	2	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
float	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
double	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
long double	10	10	8	8	16	10	8	12	12	8	16	16	16
__m64				8	8			8	8		8	8	8
__m128				16	16			16	16	16	16	16	16
__m256				32	32			32	32	32	32	32	32
__m512				64	64			64	64	64	64	64	64
pointer	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8
far pointer	4	4	4										
function pointer	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8
data member pointer (min)	2	4	6	4	4	8	4	4	4	4	4	8	8
data member pointer (max)		4	6	12	12	8	12	4	4	12	12	8	8
member function pointer (min)	2	12	6	4	4	12	4	8	8	8	8	16	16
member function pointer (max)		12	6	16	16	12	16	8	8	24	24	16	16

www.agner.org/optimize/calling_conventions.pdf

Literatur

[1] Randal E. Bryant and David R. O'Hallaron.
Computer systems – A programmers perspective.
Pearson Education Limited, Harlow, third, global ed. edition, 2015.

[2] David Goldberg.
What every computer scientist should know about floating-point.
ACM Computing Surveys, 23(1):5–48, March 1991.

[3] Georges Ifrah.
Universalgeschichte der Zahlen.
Tolkemitt bei Zweitausendeins, Frankfurt, M., 2010.

Literatur (cont.)

[4] Donald Ervin Knuth.
The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0, Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions.
Addison-Wesley Professional, Reading, MA, 2008.

[5] Donald Ervin Knuth.
The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 1, Bitwise Tricks & Techniques; Binary Decision Diagrams.
Addison-Wesley Professional, Reading, MA, 2009.

[6] Israel Koren.
Computer Arithmetic Algorithms.
CRC Press, Boca Raton, Fla., second edition, 2001.

Literatur (cont.)

[7] Laszlo Korte.
Bsc thesis: Tams tools for elearning.
Bachelorarbeit, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik, AB TAMS, 2016.

[8] Amos R. Omondi.
Computer Arithmetic Systems – Algorithms, Architecture and Implementations.
Prentice-Hall International (UK) Limited, Hemel Hempstead, Herfordshire, 1994.

[9] Otto Spaniol.
Arithmetik in Rechenanlagen.
B. G. Teubner, Stuttgart, 1976.

[10] Andrew S. Tanenbaum and Todd Austin.
Rechnerarchitektur – Von der digitalen Logik zum Parallelrechner.
Pearson Deutschland GmbH, Hallbergmoos, sixth edition, 2014.

Literatur (cont.)

[11] Klaus von der Heide.
Vorlesung: Technische informatik 1 — interaktives skript.
Vorlesungsskript, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik, AB TECH, 2005.