



# 64-040 Modul InfB-RSB

## Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

[https://tams.informatik.uni-hamburg.de/  
lectures/2021ws/vorlesung/rsb](https://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2021ws/vorlesung/rsb)

– Kapitel 8 –

Andreas Mäder



Universität Hamburg  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Fachbereich Informatik

Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2021/2022



## Schaltfunktionen

Definition

Darstellung

Normalformen

Entscheidungsbäume und OBDDs

Realisierungsaufwand und Minimierung

Minimierung mit KV-Diagrammen

Literatur



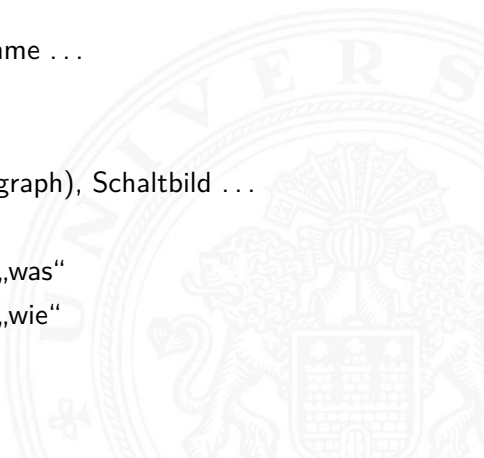
- ▶ **Schaltfunktion:** eine eindeutige Zuordnungsvorschrift  $f$ , die jeder Wertekombination  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  von Schaltvariablen einen Wert zuweist:

$$y = f(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{0, 1\}$$

- ▶ **Schaltvariable:** eine Variable, die nur endlich viele Werte annehmen kann – typisch sind binäre Schaltvariablen
- ▶ **Ausgangvariable:** die Schaltvariable am Ausgang der Funktion, die den Wert  $y$  annimmt
- ▶ bereits bekannt: *elementare Schaltfunktionen* (AND, OR usw.)  
wir betrachten jetzt Funktionen von  $n$  Variablen



- ▶ textuelle Beschreibungen  
formale Notation, Schaltalgebra, Beschreibungssprachen
- ▶ tabellarische Beschreibungen  
Funktionstabelle, KV-Diagramme ...
- ▶ graphische Beschreibungen  
Kantorovic-Baum (Datenflussgraph), Schaltbild ...
- ▶ Verhaltensbeschreibungen  $\Rightarrow$  „was“
- ▶ Strukturbeschreibungen  $\Rightarrow$  „wie“



- ▶ Tabelle mit Eingängen  $x_i$  und Ausgangswert  $y = f(x)$
- ▶ Zeilen im Binärcode sortiert
- ▶ zugehöriger Ausgangswert eingetragen

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



- ▶ Kurzschreibweise: nur die Funktionswerte notiert

$$f(x_2, x_1, x_0) = \{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0\}$$

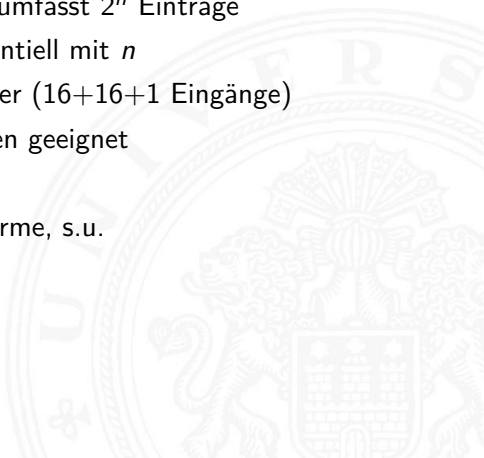
- ▶  $n$  Eingänge: Funktionstabelle umfasst  $2^n$  Einträge

- ▶ Speicherbedarf wächst exponentiell mit  $n$

z.B.:  $2^{33}$  Bit für 16-bit Addierer (16+16+1 Eingänge)

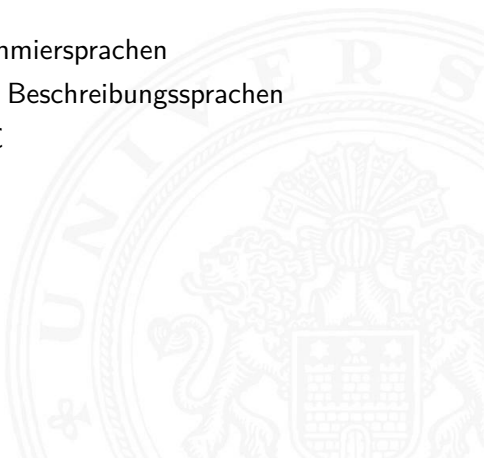
⇒ daher nur für kleine Funktionen geeignet

- ▶ Erweiterung auf *don't-care* Terme, s.u.





- ▶ Beschreibung einer Funktion als Text über ihr Verhalten
- ▶ Problem: umgangssprachliche Formulierungen oft mehrdeutig
- ▶ logische Ausdrücke in Programmiersprachen
- ▶ Einsatz spezieller (Hardware-) Beschreibungssprachen  
z.B.: Verilog, VHDL, SystemC



„Das Schiebedach ist ok ( $y$ ), wenn der Öffnungskontakt ( $x_0$ ) **oder** der Schließkontakt ( $x_1$ ) funktionieren **oder beide nicht** aktiv sind (Mittelstellung des Daches)“

K. Henke, H.-D. Wuttke: *Schaltsysteme* [WH03]

zwei mögliche Missverständnisse

- ▶ *oder*: als OR oder XOR?
- ▶ *beide nicht*:  $x_1$  und  $x_0$  nicht oder  $x_1$  nicht und  $x_0$  nicht?

⇒ je nach Interpretation völlig unterschiedliche Schaltung



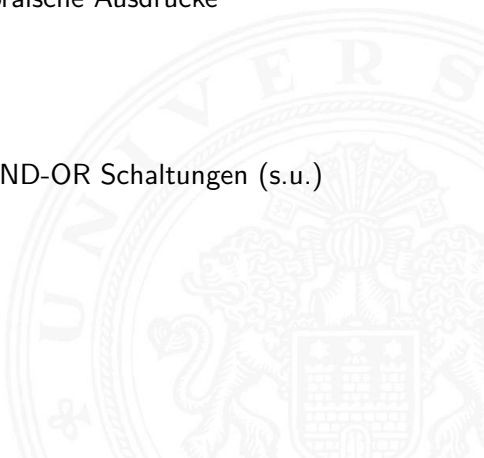


- ▶ **Strukturbeschreibung:** eine Spezifikation der konkreten Realisierung einer Schaltfunktion

- ▶ vollständig geklammerte algebraische Ausdrücke

$$f = x_1 \oplus (x_2 \vee x_3)$$

- ▶ Datenflussgraphen
- ▶ Schaltpläne mit Gattern (s.u.)
- ▶ PLA-Format für zweistufige AND-OR Schaltungen (s.u.)
- ▶ ...



- ▶ Menge  $M$  von Verknüpfungen über  $GF(2)$  heißt **funktional vollständig**, wenn die Funktionen  $f, g \in T_2$ :

$$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$$

$$g(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$$

allein mit den in  $M$  enthaltenen Verknüpfungen geschrieben werden können

- ▶ Boole'sche Algebra: { AND, OR, NOT }
- ▶ Reed-Muller Form: { AND, XOR, 1 }
- ▶ technisch relevant: { NAND }, { NOR }



- ▶ Jede Funktion kann auf beliebig viele Arten beschrieben werden

## Suche nach Standardformen

- ▶ in denen man alle Funktionen darstellen kann
- ▶ Darstellung mit universellen Eigenschaften
- ▶ eindeutige Repräsentation  $\Rightarrow$  einfache Überprüfung, ob (mehrere) gegebene Funktionen übereinstimmen
  
- ▶ Beispiel: Darstellung ganzrationaler Funktionen

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$a_i$ : Koeffizienten

$x^i$ : Basisfunktionen

## Normalform einer Boole'schen Funktion

- ▶ analog zur Potenzreihe
- ▶ als Summe über Koeffizienten  $\{0, 1\}$  und Basisfunktionen

$$f = \sum_{i=1}^{2^n} \hat{f}_i \hat{B}_i, \quad \hat{f}_i \in \text{GF}(2)$$

mit  $\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_{2^n}$  einer Basis des  $T^n$

- ▶ funktional vollständige Menge  $V$  der Verknüpfungen von  $\{0, 1\}$
- ▶ Seien  $\oplus, \otimes \in V$  und assoziativ

- ▶ Wenn sich alle  $f \in T^n$  in der Form

$$f = (\hat{f}_1 \otimes \hat{B}_1) \oplus \dots \oplus (\hat{f}_{2^n} \otimes \hat{B}_{2^n})$$

schreiben lassen, so wird die Form als **Normalform** und die Menge der  $\hat{B}_i$  als **Basis** bezeichnet.

- ▶ Menge von  $2^n$  Basisfunktionen  $\hat{B}_i$   
Menge von  $2^{2^n}$  möglichen Funktionen  $f$

# Disjunktive Normalform (DNF)

- ▶ **Minterm:** die UND-Verknüpfung *aller* Schaltvariablen einer Schaltfunktion, die Variablen dürfen dabei negiert oder nicht negiert auftreten
- ▶ **Disjunktive Normalform:** die disjunktive Verknüpfung aller Minterme  $m$  mit dem Funktionswert 1

$$f = \bigvee_{i=1}^{2^n} \hat{f}_i \cdot m(i), \quad \text{mit } m(i) : \text{Minterm}(i)$$

auch: *kanonische disjunktive Normalform*  
*sum-of-products (SOP)*

# Disjunktive Normalform: Minterme

- ▶ Beispiel: alle  $2^3$  Minterme für drei Variablen
- ▶ jeder Minterm nimmt nur für eine Belegung der Eingangsvariablen den Wert 1 an

$x_3$	$x_2$	$x_1$	Minterme
0	0	0	$\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}$
0	0	1	$\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1$
0	1	0	$\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}$
0	1	1	$\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1$
1	0	0	$x_3 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}$
1	0	1	$x_3 \wedge \overline{x_2} \wedge x_1$
1	1	0	$x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}$
1	1	1	$x_3 \wedge x_2 \wedge x_1$

# Disjunktive Normalform: Beispiel

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- ▶ Funktionstabelle: Minterm  $0 \equiv \bar{x}_i$     $1 \equiv x_i$
  - ▶ für  $f$  sind nur drei Koeffizienten der DNF gleich 1
- ⇒ DNF:  $f(x) = (\bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1) \vee (\bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1)$



- ▶ **disjunktive Form** (sum-of-products): die disjunktive Verknüpfung (ODER) von Termen. Jeder Term besteht aus der UND-Verknüpfung von Schaltvariablen, die entweder direkt oder negiert auftreten können
- ▶ entspricht dem Zusammenfassen („Minimierung“) von Termen aus der disjunktiven Normalform
- ▶ disjunktive Form ist nicht eindeutig (keine Normalform)

▶ Beispiel

DNF  $f(x) = (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1})$

minimierte disjunktive Form  $f(x) = (\overline{x_3} \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1})$

- ▶ **disjunktive Form** (sum-of-products): die disjunktive Verknüpfung (ODER) von Termen. Jeder Term besteht aus der UND-Verknüpfung von Schaltvariablen, die entweder direkt oder negiert auftreten können
- ▶ entspricht dem Zusammenfassen („Minimierung“) von Termen aus der disjunktiven Normalform
- ▶ disjunktive Form ist nicht eindeutig (keine Normalform)

▶ Beispiel

DNF  $f(x) = (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1})$

minimierte disjunktive Form  $f(x) = (\overline{x_3} \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1})$

$$f(x) = (x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1)$$

# Konjunktive Normalform (KNF)

- ▶ **Maxterm:** die ODER-Verknüpfung *aller* Schaltvariablen einer Schaltfunktion, die Variablen dürfen dabei negiert oder nicht negiert auftreten
- ▶ **Konjunktive Normalform:** die konjunktive Verknüpfung aller Maxterme  $\mu$  mit dem Funktionswert 0

$$f = \bigwedge_{i=1}^{2^n} \hat{f}_i \cdot \mu(i), \quad \text{mit } \mu(i) : \text{Maxterm}(i)$$

auch: *kanonische konjunktive Normalform*  
*product-of-sums (POS)*

# Konjunktive Normalform: Maxterme

- ▶ Beispiel: alle  $2^3$  Maxterme für drei Variablen
- ▶ jeder Maxterm nimmt nur für eine Belegung der Eingangsvariablen den Wert 0 an

$x_3$	$x_2$	$x_1$	Maxterme
0	0	0	$x_3 \vee x_2 \vee x_1$
0	0	1	$x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1}$
0	1	0	$x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$
0	1	1	$x_3 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1}$
1	0	0	$\overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$
1	0	1	$\overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}$
1	1	0	$\overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee x_1$
1	1	1	$\overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1}$

# Konjunktive Normalform: Beispiel

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- ▶ Funktionstabelle: Maxterm  $0 \equiv x_i$     $1 \equiv \bar{x}_i$
- ▶ für  $f$  sind fünf Koeffizienten der KNF gleich 0

⇒ KNF: 
$$f(x) = (x_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)$$

- ▶ **konjunktive Form** (product-of-sums): die konjunktive Verknüpfung (UND) von Termen. Jeder Term besteht aus der ODER-Verknüpfung von Schaltvariablen, die entweder direkt oder negiert auftreten können
- ▶ entspricht dem Zusammenfassen („Minimierung“) von Termen aus der konjunktiven Normalform
- ▶ konjunktive Form ist nicht eindeutig (keine Normalform)

▶ Beispiel

$$\text{KNF } f(x) = (x_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1) \wedge (\overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1})$$

minimierte konjunktive Form

$$f(x) = (x_3 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_1) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{x_1})$$

- ▶ **Reed-Muller Form:** die additive Verknüpfung aller Reed-Muller-Terme mit dem Funktionswert 1

$$f = \bigoplus_{i=1}^{2^n} \hat{f}_i \cdot RM(i)$$

- ▶ mit den Reed-Muller Basisfunktionen  $RM(i)$
- ▶ Erinnerung: Addition im  $GF(2)$  ist die XOR-Operation

- ▶ Basisfunktionen sind:

$\{1\}$ , (0 Variablen)

$\{1, x_1\}$ , (1 Variable )

$\{1, x_1, x_2, x_2x_1\}$ , (2 Variablen)

$\{1, x_1, x_2, x_2x_1, x_3, x_3x_1, x_3x_2, x_3x_2x_1\}$ , (3 Variablen)

...

$\{RM(n-1), x_n \cdot RM(n-1)\}$  ( $n$  Variablen)

- ▶ rekursive Bildung: bei  $n$  bit alle Basisfunktionen von  $(n-1)$ -bit und zusätzlich das Produkt von  $x_n$  mit den Basisfunktionen von  $(n-1)$ -bit



Umrechnung von gegebenem Ausdruck in Reed-Muller Form?

- ▶ Ersetzen der Negation:  $\bar{a} = a \oplus 1$   
Ersetzen der Disjunktion:  $a \vee b = a \oplus b \oplus ab$   
Ausnutzen von:  $a \oplus a = 0$

- ▶ Beispiel

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= (\bar{x}_1 \vee x_2)x_3 \\ &= (\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_1x_2)x_3 \\ &= ((1 \oplus x_1) \oplus x_2 \oplus (1 \oplus x_1)x_2)x_3 \\ &= (1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_2 \oplus x_1x_2)x_3 \\ &= x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3\end{aligned}$$

# Reed-Muller Form: Transformationsmatrix

- ▶ lineare Umrechnung zwischen Funktion  $f$ , bzw. der Funktionstabelle (disjunktive Normalform), und RMF
- ▶ Transformationsmatrix  $A$  kann rekursiv definiert werden (wie die RMF-Basisfunktionen)
- ▶ Multiplikation von  $A$  mit  $f$  ergibt Koeffizientenvektor  $r$  der RMF

$$r = A \cdot f \quad \text{und} \quad f = A \cdot r$$

gilt wegen:  $r = A \cdot f$  und  $A \cdot A = I$ , also  $f = A \cdot r$  !

$$A_0 = (1)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Reed-Muller Form: Transformationsmatrix (cont.)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

...

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ A_{n-1} & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

# Reed-Muller Form: Beispiel

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- ▶ Berechnung durch Rechenregeln der Boole'schen Algebra oder Aufstellen von  $A_3$  und Ausmultiplizieren:  $f(x) = x_2 \oplus x_3x_2x_1$
- ▶ häufig kompaktere Darstellung als DNF oder KNF

# Reed-Muller Form: Beispiel (cont.)

- ▶  $f(x_3, x_2, x_1) = \{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0\}$  (Funktionstabelle)
- ▶ Aufstellen von  $A_3$  und Ausmultiplizieren

$$r = A_3 \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

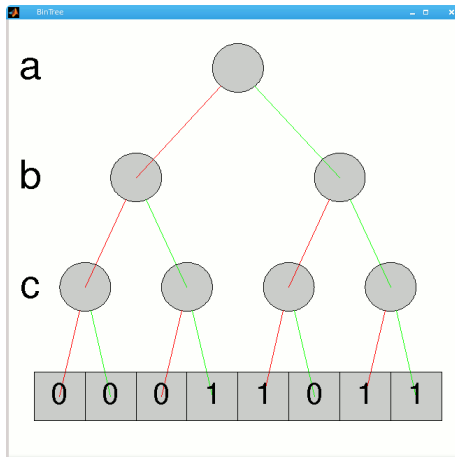
Basisfunktionen:  $\{1, x_1, x_2, x_2x_1, x_3, x_3x_1, x_3x_2, x_3x_2x_1\}$

führt zur gesuchten RMF:

$$f(x_3, x_2, x_1) = r \cdot RM(3) = x_2 \oplus x_3x_2x_1$$

- ▶ Darstellung einer Schaltfunktion als Baum/Graph
- ▶ jeder Knoten ist einer Variablen zugeordnet  
jede Verzweigung entspricht einer *if-then-else*-Entscheidung
- ▶ vollständige Baum realisiert Funktionstabelle
- + einfaches Entfernen/Zusammenfassen redundanter Knoten
- ▶ Beispiel: Multiplexer  
 $f(a, b, c) = (a \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c)$

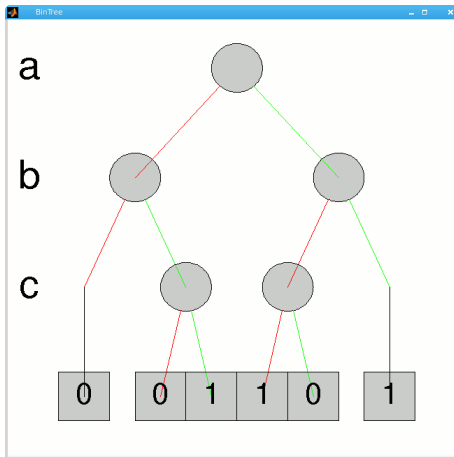
# Entscheidungsbaum: Beispiel



►  $f(a, b, c) = (a \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c)$

- rot: 0-Zweig  
grün: 1-Zweig

# Entscheidungsbaum: Beispiel (cont.)



►  $f(a, b, c) = (a \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c)$

⇒ Knoten entfernt

- rot: 0-Zweig  
grün: 1-Zweig





# Reduced Ordered Binary-Decision Diagrams (ROBDD)

## Binäres Entscheidungsdiagramm

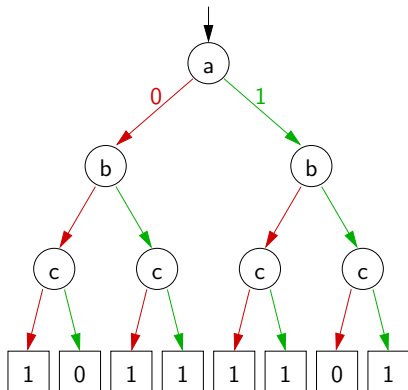
- ▶ Variante des Entscheidungsbaums
- ▶ vorab gewählte Variablenordnung *(ordered)*
- ▶ redundante Knoten werden entfernt *(reduced)*
- ▶ ein ROBDD ist eine Normalform für eine Funktion
  
- ▶ viele praxisrelevante Funktionen sehr kompakt darstellbar  
 $\mathcal{O}(n) \dots \mathcal{O}(n^2)$  Knoten bei  $n$  Variablen
- ▶ wichtige Ausnahme:  $n$ -bit Multiplizierer ist  $\mathcal{O}(2^n)$
- ▶ derzeit das Standardverfahren zur Manipulation von  
(großen) Schaltfunktionen

R. E. Bryant: *Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation*, [Bry86]

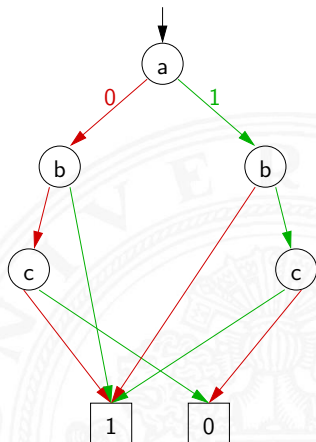
# ROBDD vs. Entscheidungsbaum

Entscheidungsbaum

$$f = (abc) \vee (a\bar{b}) \vee (\bar{a}b) \vee (\bar{a}\bar{b}\bar{c})$$

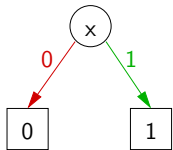


ROBDD

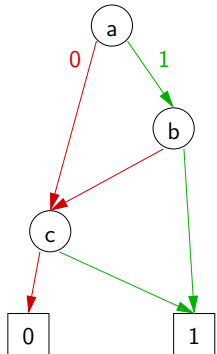


# ROBDD: Beispiele

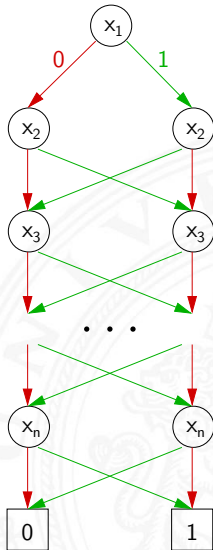
$$f(x) = x$$



$$g = (a b) \vee c$$



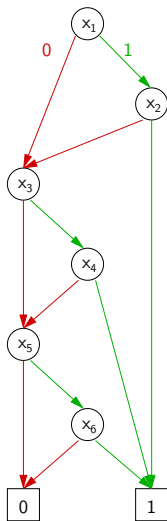
$$\text{Parität } p = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$$



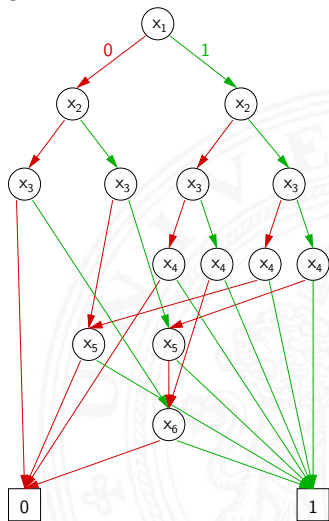
# ROBDD: Problem der Variablenordnung

- ▶ Anzahl der Knoten oft stark abhängig von der Variablenordnung

$$f = x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_5 x_6$$



$$g = x_1 x_4 \vee x_2 x_5 \vee x_3 x_6$$



- ▶ mehrere (beliebig viele) Varianten zur Realisierung einer gegebenen Schaltfunktion bzw. eines Schaltnetzes

Minimierung des Realisierungsaufwandes:

- ▶ diverse Kriterien, technologieabhängig
- ▶ Hardwarekosten                      Anzahl der Gatter
- ▶ Hardwareeffizienz                    z.B. NAND statt XOR
- ▶ Geschwindigkeit                      Anzahl der Stufen, Laufzeiten
- ▶ Testbarkeit                            Erkennung von Produktionsfehlern
- ▶ Robustheit                              z.B. ionisierende Strahlung

- ▶ Vereinfachung der gegebenen Schaltfunktionen durch Anwendung der Gesetze der Boole'schen Algebra
- ▶ im Allgemeinen nur durch Ausprobieren
- ▶ ohne Rechner sehr mühsam
- ▶ keine allgemeingültigen Algorithmen bekannt
- ▶ Heuristische Verfahren
  - ▶ Suche nach *Primimplikanten* ( = kürzeste Konjunktionsterme)
  - ▶ Quine-McCluskey-Verfahren und Erweiterungen

- ▶ Ausgangsfunktion in DNF

$$\begin{aligned}y(x) = & \overline{x_3} x_2 x_1 \overline{x_0} \vee \overline{x_3} x_2 x_1 x_0 \\ & \vee x_3 \overline{x_2} \overline{x_1} x_0 \vee x_3 \overline{x_2} x_1 \overline{x_0} \\ & \vee x_3 \overline{x_2} x_1 x_0 \vee x_3 x_2 \overline{x_1} x_0 \\ & \vee x_3 x_2 x_1 \overline{x_0} \vee x_3 x_2 x_1 x_0\end{aligned}$$

- ▶ Zusammenfassen benachbarter Terme liefert

$$y(x) = \overline{x_3} x_2 x_1 \vee x_3 \overline{x_2} x_0 \vee x_3 \overline{x_2} x_1 \vee x_3 x_2 x_0 \vee x_3 x_2 x_1$$

- ▶ aber bessere Lösung ist möglich (weiter Umformen)

$$y(x) = x_2 x_1 \vee x_3 x_0 \vee x_3 x_1$$

- ▶ Darstellung einer Schaltfunktion im KV-Diagramm
- ▶ Interpretation als disjunktive Normalform (konjunktive NF)
  
- ▶ Zusammenfassen benachbarter Terme durch **Schleifen**
- ▶ alle 1-Terme mit möglichst wenigen Schleifen abdecken  
(alle 0-Terme  $\bar{\quad}$   $\equiv$  konjunktive Normalform)
- ▶ Ablesen der minimierten Funktion, wenn keine weiteren Schleifen gebildet werden können
  
- ▶ beruht auf der menschlichen Fähigkeit, benachbarte Flächen auf einen Blick zu „sehen“
- ▶ bei mehr als 6 Variablen nicht mehr praktikabel



# Erinnerung: Karnaugh-Veitch Diagramm

	$x_1 x_0$	00	01	11	10
$x_3 x_2$	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

	$x_1 x_0$	00	01	11	10
$x_3 x_2$	00	0000	0001	0011	0010
	01	0100	0101	0111	0110
	11	1100	1101	1111	1110
	10	1000	1001	1011	1010

- ▶ 2D-Diagramm mit  $2^n = 2^{n_y} \times 2^{n_x}$  Feldern
  - ▶ gängige Größen sind:  $2 \times 2$ ,  $2 \times 4$ ,  $4 \times 4$   
darüber hinaus: mehrere Diagramme der Größe  $4 \times 4$
  - ▶ Anordnung der Indizes ist im einschrittigen-Code / Gray-Code
- ⇒ benachbarte Felder unterscheiden sich gerade um 1 Bit

# KV-Diagramme: 2...4 Variable (2x2, 2x4, 4x4)

	$x_0$	0	1
$x_1$	0	00	01
	1	10	11

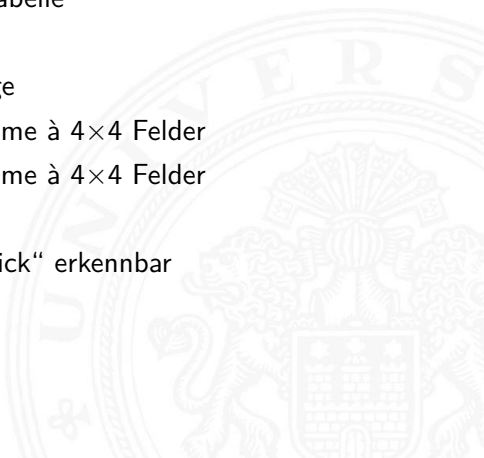
	$x_1 x_0$	00	01	11	10
$x_2$	0	000	001	011	010
	1	100	101	111	110

	$x_1 x_0$	00	01	11	10
$x_3 x_2$	00	0000	0001	0011	0010
	01	0100	0101	0111	0110
	11	1100	1101	1111	1110
	10	1000	1001	1011	1010

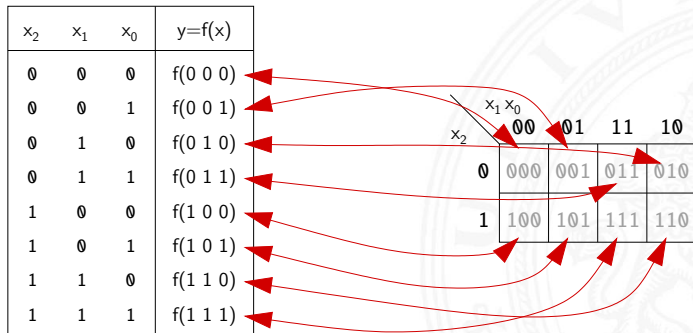
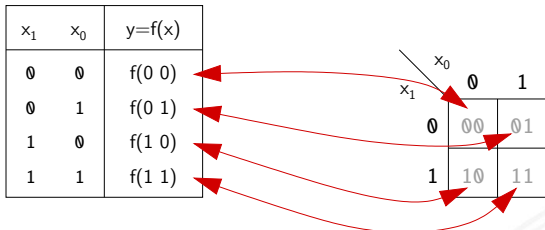


# KV-Diagramm für Schaltfunktionen

- ▶ Funktionswerte in zugehöriges Feld im KV-Diagramm eintragen
- ▶ Werte 0 und 1  
*Don't-Care* „\*“ für nicht spezifizierte Werte wichtig!
- ▶ 2D-Äquivalent zur Funktionstabelle
  
- ▶ praktikabel für 3...6 Eingänge
- ▶ fünf Eingänge: zwei Diagramme à 4×4 Felder  
sechs Eingänge: vier Diagramme à 4×4 Felder
  
- ▶ viele Strukturen „auf einen Blick“ erkennbar



# KV-Diagramm: Zuordnung zur Funktionstabelle



# KV-Diagramm: Eintragen aus Funktionstabelle

$x_1$	$x_0$	$y=f(x)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

A 2x2 Karnaugh map for two variables  $x_1$  and  $x_0$ . The top row is labeled  $x_0$  and the left column is labeled  $x_1$ . The cells contain the values 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1. Red arrows point from the truth table to the corresponding cells in the Karnaugh map.

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0	0
1	1	1

$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y=f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A 2x4 Karnaugh map for three variables  $x_2$ ,  $x_1$ , and  $x_0$ . The top row is labeled  $x_1 x_0$  and the left column is labeled  $x_2$ . The cells contain the values 00, 01, 11, 10, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1. Red arrows point from the truth table to the corresponding cells in the Karnaugh map.

$x_2 \backslash x_1 x_0$	00	01	11	10	
0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1

# KV-Diagramm: Beispiel

$x_3 x_2$ \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_3 x_2$ \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

- ▶ Beispielfunktion in DNF mit vier Termen:  
 $f(x) = (\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0}) \vee (\overline{x_3} \overline{x_2} x_1 \overline{x_0}) \vee (x_3 \overline{x_2} x_1 x_0) \vee (x_3 x_2 x_1 x_0)$
- ▶ Werte aus Funktionstabelle an entsprechender Stelle ins Diagramm eintragen

# Schleifen: Zusammenfassen benachbarter Terme

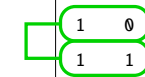
- ▶ benachbarte Felder unterscheiden sich um 1-Bit
- ▶ falls benachbarte Terme beide 1 sind  $\Rightarrow$  Funktion hängt an dieser Stelle nicht von der betroffenen Variable ab
- ▶ zugehörige (Min-) Terme können zusammengefasst werden
  
- ▶ Erweiterung auf vier benachbarte Felder (4x1 1x4 2x2)  
    –"–      auf acht      –"–      (4x2 2x4) usw.
- ▶ aber keine Dreier- Fünfergruppen usw. (Gruppengröße  $2^i$ )
  
- ▶ Nachbarschaft auch „außen herum“
- ▶ mehrere Schleifen dürfen sich überlappen

# Schleifen: Ablesen der Schleifen

$x_1$	$x_0$	$y=f(x)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$$f(x_1, x_0) = x_1$$

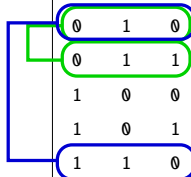
$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0	0
1	1	1



$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y=f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2 x_1 \vee x_1 \bar{x}_0$$

$x_2 \backslash x_1 x_0$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	0	1





# Schleifen: Ablesen der Schleifen (cont.)

		$x_1 x_0$			
		00	01	11	10
$x_3 x_2$	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

		$x_1 x_0$			
		00	01	11	10
$x_3 x_2$	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

- ▶ insgesamt zwei Schleifen möglich
- ▶ grün entspricht  $(\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_0}) = (\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0}) \vee (\overline{x_3} \overline{x_2} x_1 \overline{x_0})$   
blau entspricht  $(x_3 x_1 x_0) = (x_3 x_2 x_1 x_0) \vee (x_3 \overline{x_2} x_1 x_0)$
- ▶ minimierte disjunktive Form  $f(x) = (\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_0}) \vee (x_3 x_1 x_0)$

- ▶ Minimierung mit KV-Diagrammen [Kor16]

[tams.informatik.uni-hamburg.de/research/software/tams-tools/kvd-editor.html](http://tams.informatik.uni-hamburg.de/research/software/tams-tools/kvd-editor.html)

- ▶ Auswahl der Funktionalität: *Edit function, Edit loops*
- ▶ Explizite Eingabe: *Open Diagram - From Expressions*
- 1 Funktion: Maustaste ändert Werte
- 2 Schleifen: Auswahl und Aufziehen mit Maustaste
- ▶ Anzeige des zugehörigen Hardwareaufwands und der Schaltung

Tipp!

- ▶ Applet zur Minimierung mit KV-Diagrammen [HenKV]

[tams.informatik.uni-hamburg.de/applets/kvd](http://tams.informatik.uni-hamburg.de/applets/kvd)

- ▶ Auswahl der Funktionalität: *Edit function, Add loop ...*
- ▶ Ändern der Ein-/Ausgänge: *File - Examples - User define dialog*
- 1 Funktion: Maustaste ändert Werte
- 2 Schleifen: Maustaste, *shift*+Maus, *ctrl*+Maus
- ▶ Anzeige des zugehörigen Hardwareaufwands und der Schaltung
- ▶ **Achtung:** andere Anordnung der Eingangsvariablen als im Skript  
⇒ andere Anordnung der Terme im KV-Diagramm

# KV-Diagramm Editor: Screenshots

8.6 Schaltfunktionen - Minimierung mit KV-Diagrammen

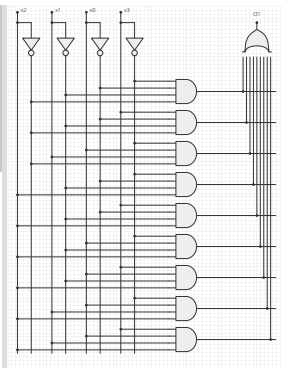
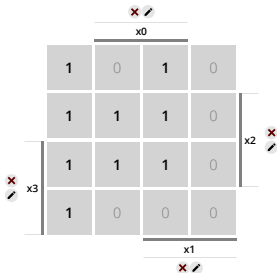
64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

Edit function Edit loops

Inputs:  $-$  4  $+$       Outputs: 1  $+$

Q1

DNF    KNF    No loops have been created yet



Costs: 10 gates with 45 inputs

Eingabe der Schaltfunktion


# KV-Diagramm Editor: Screenshots (cont.)

8.6 Schaltfunktionen - Minimierung mit KV-Diagrammen

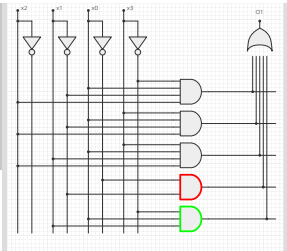
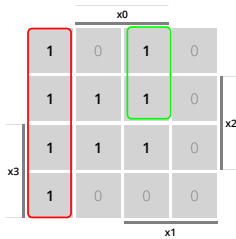
64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

Edit function **Edit loops**

Inputs: **4**      Outputs: **1**

 **o1**

DNF    KNF    **X** **X**



Costs: 6 gates with 22 inputs

## Minimierung durch Schleifenbildung

# KV-Diagramm Editor: Screenshots (cont.)

8.6 Schaltfunktionen - Minimierung mit KV-Diagrammen

64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

The screenshot displays the KV-Diagramm Editor interface. At the top, there are tabs for "Edit function" and "Edit loops". Below these, the configuration shows "Inputs: 4" and "Outputs: 1". A small grid icon is labeled "o1". Below the configuration, there are buttons for "DNF" and "KNF", and three colored buttons (red 'x', green 'x', blue 'x').

The main area is divided into two parts. The top part shows a logic circuit diagram with four input lines labeled  $x_3$ ,  $x_2$ ,  $x_1$ , and  $x_0$ . Each input line has an inverter. The circuit uses three 2-input AND gates (red, green, and blue) and one 3-input OR gate. The red AND gate takes  $x_2$  and  $x_1$  as inputs. The green AND gate takes  $x_2$  and  $x_0$  as inputs. The blue AND gate takes  $x_1$  and  $x_0$  as inputs. The outputs of these three AND gates are connected to the inputs of the 3-input OR gate, which produces the output  $o1$ .

The bottom part shows a truth table with columns  $x_3$ ,  $x_2$ ,  $x_1$ , and  $x_0$ . The values are:

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	Output
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0

The truth table has three highlighted regions: a red box around the first column (all 1s), a green box around the top-right 2x2 subgrid, and a blue box around the middle 2x2 subgrid.

At the bottom right of the interface, a summary box states: "Costs: 4 gates with 10 inputs".

- ▶ Hardware-Kosten: # Gatter, Eingänge

# KV-Diagramm Editor: Screenshots (cont.)

8.6 Schaltfunktionen - Minimierung mit KV-Diagrammen

64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

The screenshot displays the KV-Diagramm Editor interface. At the top, there are tabs for "Edit function" and "Edit loops". Below these, the configuration shows "Inputs: 4" and "Outputs: 1". A small grid icon is labeled "o1".

Below the configuration, there is a row of buttons: "DNF", "KNF", and three buttons with red, green, and blue 'x' symbols. The "KNF" button is highlighted.

The main area is divided into two parts. The top part shows a logic circuit with four inputs labeled  $x_3, x_2, x_1, x_0$  and one output labeled  $o1$ . The circuit consists of four inverters, three OR gates (red, green, and blue), and one AND gate. The bottom part of the main area is a large gray rectangle.

At the bottom right of the main area, a text box states: "Costs: 4 gates with 11 inputs".

Below the main interface, a truth table is shown with variables  $x_3, x_2, x_1, x_0$  and output  $o1$ . The table is:

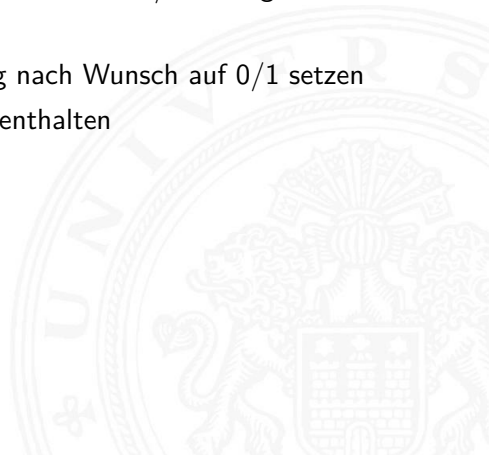
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$o1$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0

The truth table has four rows and five columns. The columns are labeled  $x_3, x_2, x_1, x_0$  and  $o1$ . The output  $o1$  is 0 for all four rows. The cells containing 0 are highlighted with colored boxes: a blue dashed box around the top-left 0, a red solid box around the top-right 0, a green solid box around the bottom-left 0, and a green solid box around the bottom-right 0.

Konjunktive Form



- ▶ in der Praxis: viele Schaltfunktionen unvollständig definiert weil bestimmte Eingangskombinationen nicht vorkommen
- ▶ zugehörige Terme als **Don't-Care** markieren  
typisch: Sternchen „\*“ in Funktionstabelle/KV-Diagramm
- ▶ solche Terme bei Minimierung nach Wunsch auf 0/1 setzen
- ▶ Schleifen dürfen *Don't-Cares* enthalten
- ▶ Schleifen möglichst groß



# KV-Diagramm Editor: 6 Variablen, *Don't-Cares*

8.6 Schaltfunktionen - Minimierung mit KV-Diagrammen

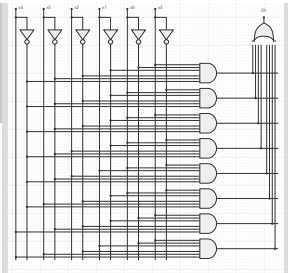
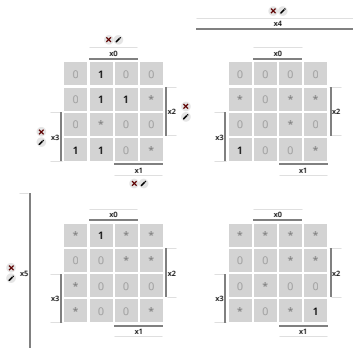
64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

Edit function Edit loops

Inputs: **6** Outputs: **1**

01

DNF KNF No loops have been created yet



Costs: 9 gates with 56 inputs



# KV-Diagramm Editor: 6 Variablen, *Don't-Cares* (cont.)

8.6 Schaltfunktionen - Minimierung mit KV-Diagrammen

64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

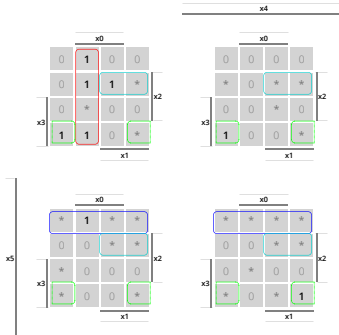
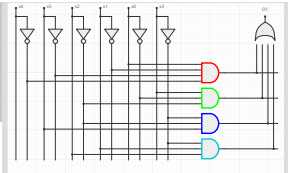
Editor interface showing function settings and logic symbols.

Edit function | Edit loops

Inputs: 6 | Outputs: 1

01

DNF | KNF | **X** | **X** | **X** | **X**



Costs: 5 gates with 17 inputs

- ▶ Algorithmus zur Minimierung einer Schaltfunktion
- ▶ Notation der Terme in Tabellen,  $n$  Variablen
- ▶ Prinzip entspricht der Minimierung im KV-Diagramm aber auch geeignet für mehr als sechs Variablen
- ▶ Grundlage gängiger Minimierungsprogramme
  
- ▶ Sortieren der Terme nach Hamming-Abstand
- ▶ Erkennen der unverzichtbaren Terme („Primimplikanten“)
- ▶ Aufstellen von Gruppen benachbarter Terme (mit Distanz 1)
- ▶ Zusammenfassen geeigneter benachbarter Terme

Becker, Molitor: *Technische Informatik – eine einführende Darstellung* [BM08]

Schiffmann, Schmitz: *Technische Informatik I* [SS04]

- [BM08] B. Becker, P. Molitor: *Technische Informatik – eine einführende Darstellung*. 2. Auflage, Oldenbourg, 2008. ISBN 978–3–486–58650–3
- [SS04] W. Schiffmann, R. Schmitz: *Technische Informatik 1 – Grundlagen der digitalen Elektronik*. 5. Auflage, Springer-Verlag, 2004. ISBN 978–3–540–40418–7
- [WH03] H.D. Wuttke, K. Henke: *Schaltsysteme – Eine automatenorientierte Einführung*. Pearson Studium, 2003. ISBN 978–3–8273–7035–8
- [Bry86] R.E. Bryant: *Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation*. in: *IEEE Trans. Computers* 35 (1986), Nr. 8, S. 677–691

- [Kor16] Laszlo Korte: *TAMS Tools for eLearning*.  
Universität Hamburg, FB Informatik, 2016, BSc Thesis. [tams.informatik.uni-hamburg.de/research/software/tams-tools](http://tams.informatik.uni-hamburg.de/research/software/tams-tools)
- [HenKV] N. Hendrich: *KV-Diagram Simulation*.  
Universität Hamburg, FB Informatik, Lehrmaterial.  
[tams.informatik.uni-hamburg.de/applets/kvd](http://tams.informatik.uni-hamburg.de/applets/kvd)
- [Hei05] K. von der Heide: *Vorlesung: Technische Informatik 1 — interaktives Skript*. Universität Hamburg, FB Informatik, 2005.  
[tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2004ws/vorlesung/t1](http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2004ws/vorlesung/t1)