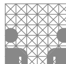
MIN-Fakultät
Fachbereich Informatik



64-040 Modul InfB-RSB
Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

https://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2020ws/vorlesung/rsb

– Kapitel 6 –

Andreas Mäder

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2020/2021

Kapitel 6

Logische Operationen
- Boole'sche Algebra
- Boole'sche Operationen
- Bitweise logische Operationen
- Schiebeoperationen
- Anwendungsbeispiele
- Literatur

Nutzen einer (abstrakten) Algebra?!

Analyse und Beschreibung von

- gemeinsamen, wichtigen Eigenschaften
- mathematischer Operationen
- mit vielfältigen Anwendungen

Spezifiziert durch

- die Art der Elemente (z.B. ganze Zahlen, Aussagen usw.)
- die Verknüpfungen (z.B. Addition, Multiplikation)
- zentrale Elemente (z.B. Null-, Eins-, inverse Elemente)

Anwendungen:	Computerarithmetik	$\rightarrow$ Datenverarbeitung
	Fehlererkennung/-korrektur	$\rightarrow$ Datenübertragung
	Codierung	$\rightarrow$ Repräsentation
	...	

Boole'sche Algebra

- George Boole, 1850: Untersuchung von logischen Aussagen mit den Werten *true* (wahr) und *false* (falsch)
- Definition einer Algebra mit diesen Werten
- drei grundlegende Funktionen:
  - NEGATION (NOT) Schreibweisen: $\neg a$, $\overline{a}$, ~a
  - UND –"– $a \wedge b$, $a \,\&\, b$
  - ODER –"– $a \vee b$, $a \mid b$
  - XOR –"– $a \oplus b$, $a\ \hat{}\ b$
- Claude Shannon, 1937: Realisierung der Boole'schen Algebra mit Schaltfunktionen (binäre digitale Logik)

Grundverknüpfungen

- zwei Werte: *wahr* (*true*, 1) und *falsch* (*false*, 0)
- drei grundlegende Verknüpfungen:

NOT(x)

x	
0	1
1	0

AND(x, y)

x \ y	0	1
0	0	0
1	0	1

OR(x, y)

x \ y	0	1
0	0	1
1	1	1

XOR(x, y)

x \ y	0	1
0	0	1
1	1	0

- alle logischen Operationen lassen sich mit diesen Funktionen darstellen

⇒ *vollständige Basismenge*

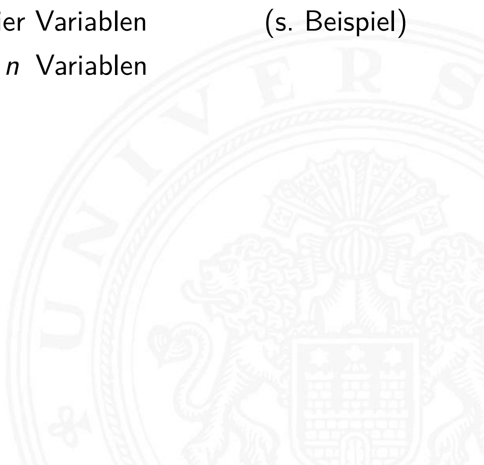
Anzahl der binären Funktionen

- insgesamt 4 Funktionen mit einer Variable

  $f_0(x) = 0,\ f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = \neg x$

- insgesamt 16 Funktionen zweier Variablen (s. Beispiel)
- allgemein 2^{2^n} Funktionen von n Variablen

- später noch viele Beispiele



Anzahl der binären Funktionen (cont.)

x =	0	1	0	1				
y =	**0**	**0**	**1**	**1**	**Bezeichnung**	**Notation**	**alternativ**	**Java / C**
	0	0	0	0	Nullfunktion	0		`0`
	0	0	0	1	AND	$x \cap y$	$x \wedge y$	`x&&y`
	0	0	1	0	Inhibition	$x < y$		`x<y`
	0	0	1	1	Identität y	y		`y`
	0	1	0	0	Inhibition	$x > y$		`x>y`
	0	1	0	1	Identität x	x		`x`
	0	1	1	0	XOR	$x \oplus y$	$x \neq y$	`x!=y`
	0	1	1	1	OR	$x \cup y$	$x \vee y$	`x||y`
	1	0	0	0	NOR	$\neg(x \cup y)$	$\overline{x \vee y}$	`!(x||y)`
	1	0	0	1	Äquivalenz	$\neg(x \oplus y)$	$x = y$	`x==y`
	1	0	1	0	NICHT x	$\neg x$	$\overline{x}$	`!x`
	1	0	1	1	Implikation	$x \leq y$	$x \rightarrow y$	`x<=y`
	1	1	0	0	NICHT y	$\neg y$	$\overline{y}$	`!y`
	1	1	0	1	Implikation	$x \geq y$	$x \leftarrow y$	`x>=y`
	1	1	1	0	NAND	$\neg(x \cap y)$	$\overline{x \wedge y}$	`!(x&&y)`
	1	1	1	1	Einsfunktion	1		`1`

Boole'sche Algebra - formale Definition

- 6-Tupel $\langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, \ 0,1 \rangle$ bildet eine Algebra

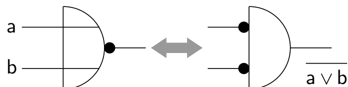
- $\{0,1\}$ Menge mit zwei Elementen
- $\vee$ ist die „Addition“
- $\wedge$ ist die „Multiplikation“
- $\neg$ ist das „Komplement“ (nicht das Inverse!)
- 0 (false) ist das Nullelement der Addition
- 1 (true) ist das Einselement der Multiplikation

Rechenregeln: Ring / Algebra

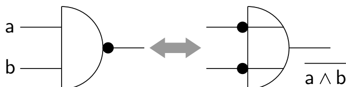
Eigenschaft	Ring der ganzen Zahlen	Boole'sche Algebra
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$a \vee b = b \vee a$
	$a \cdot b = b \cdot a$	$a \wedge b = b \wedge a$
Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
Distributivgesetz	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Identitäten	$a + 0 = a$	$a \vee 0 = a$
	$a \cdot 1 = a$	$a \wedge 1 = a$
Vernichtung	$a \cdot 0 = 0$	$a \wedge 0 = 0$
Auslöschung	$-(-a) = a$	$\neg(\neg a) = a$
Inverses	$a + (-a) = 0$	—
Distributivgesetz	—	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Komplement	—	$a \vee \neg a = 1$
	—	$a \wedge \neg a = 0$
Idempotenz	—	$a \vee a = a$
	—	$a \wedge a = a$
Absorption	—	$a \vee (a \wedge b) = a$
	—	$a \wedge (a \vee b) = a$
De Morgan Regeln	—	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
	—	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

De Morgan Regeln

$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$



$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$



1. Ersetzen von *UND* durch *ODER* und umgekehrt
   $\Rightarrow$ Austausch der Funktion
2. Invertieren aller Ein- und Ausgänge

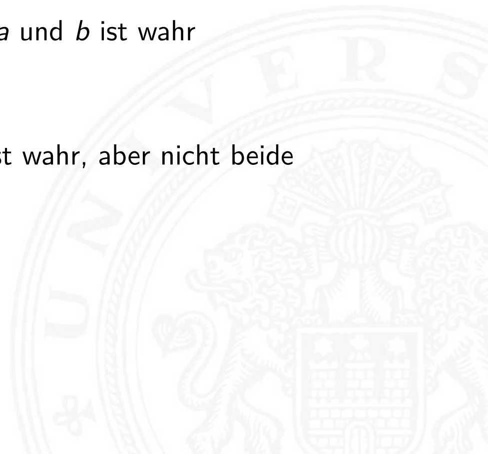
Verwendung

- bei der Minimierung logischer Ausdrücke
- beim Entwurf von Schaltungen
- siehe Kapitel *8 Schaltfunktionen* und *9 Schaltnetze*

XOR: Exklusiv-Oder / Antivalenz

$\Rightarrow$ entweder *a* oder *b* (ausschließlich)
a ungleich *b* ($\Rightarrow$ Antivalenz)

- $a \oplus b = (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$
  genau einer von den Termen *a* und *b* ist wahr
- $a \oplus b = (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$
  entweder *a* ist wahr, oder *b* ist wahr, aber nicht beide gleichzeitig
- $a \oplus a = 0$



Logische Operationen in Java und C

- Datentyp für Boole'sche Logik
  - Java: Datentyp `boolean`
  - C: implizit für alle Integertypen
- Vergleichsoperationen
- Logische Grundoperationen
- Bitweise logische Operationen
  = parallele Berechnung auf Integer-Datentypen
- Auswertungsreihenfolge
  - Operatorprioritäten
  - Auswertung von links nach rechts
  - (optionale) Klammerung

Vergleichsoperationen

- `a == b` wahr, wenn *a* gleich *b*
  `a != b` wahr, wenn *a* ungleich *b*
  `a >= b` wahr, wenn *a* größer oder gleich *b*
  `a >  b` wahr, wenn *a* größer *b*
  `a <  b` wahr, wenn *a* kleiner *b*
  `a <= b` wahr, wenn *a* kleiner oder gleich *b*

- Vergleich zweier Zahlen, Ergebnis ist logischer Wert
- Java: Integerwerte alle im Zweierkomplement
  C: Auswertung berücksichtigt signed/unsigned-Typen

Logische Operationen in C

- zusätzlich zu den Vergleichsoperatoren <, <=, ==, !=, >, >=
- drei **logische** Operatoren:

!	logische Negation
&&	logisches UND
||	logisches ODER

- Interpretation der Integerwerte:
  der Zahlenwert *0* ⇔ logische 0 (false)
  alle anderen Werte ⇔ logische 1 (true)

⇒ völlig andere Semantik als in der Mathematik Achtung!

⇒ völlig andere Funktion als die bitweisen Operationen

Logische Operationen in C (cont.)

- verkürzte Auswertung von links nach rechts (*shortcut*)
  - Abbruch, wenn Ergebnis feststeht
  - \+ kann zum Schutz von Ausdrücken benutzt werden
  - − kann aber auch Seiteneffekte haben, z.B. Funktionsaufrufe

- Beispiele
  - `(a > b) || ((b != c) && (b <= d))`
  -

Ausdruck	Wert
`!0x41`	`0x00`
`!0x00`	`0x01`
`!!0x00`	`0x00`
`0x69 && 0x55`	`0x01`
`0x69 || 0x55`	`0x01`

Logische Operationen in C: Logisch vs. Bitweise

- der Zahlenwert *0* $\Leftrightarrow$ logische 0 (false)
  alle anderen Werte $\Leftrightarrow$ logische 1 (true)

- Beispiel: `x = 0x66` und `y = 0x93`

bitweise Operation		logische Operation	
Ausdruck	Wert	Ausdruck	Wert
`x`	0110 0110	`x`	0000 0001
`y`	1001 0011	`y`	0000 0001
`x & y`	0000 0010	`x && y`	0000 0001
`x | y`	1111 0111	`x || y`	0000 0001
`~x | ~y`	1111 1101	`!x || !y`	0000 0000
`x & ~y`	0110 0100	`x && !y`	0000 0000

Logische Operationen in C: verkürzte Auswertung

- logische Ausdrücke werden von links nach rechts ausgewertet
- Klammern werden natürlich berücksichtigt
- Abbruch, sobald der Wert eindeutig feststeht (*shortcut*)
- Vor- oder Nachteile möglich (codeabhängig)
  - \+ `(a && 5/a)` niemals Division durch Null. Der Quotient wird nur berechnet, wenn der linke Term ungleich Null ist.
  - \+ `(p && *p++)` niemals Nullpointer-Zugriff. Der Pointer wird nur verwendet, wenn `p` nicht Null ist.

Ternärer Operator

- ⟨*condition*⟩ `?` ⟨*true-expression*⟩ `:` ⟨*false-expression*⟩
- Beispiel: `(x < 0) ? -x : x` Absolutwert von x

Logische Operationen in Java

- Java definiert eigenen Datentyp `boolean`
- elementare Werte `false` und `true`
- alternativ `Boolean.FALSE` und `Boolean.TRUE`
- **keine** Mischung mit Integer-Werten wie in C

- Vergleichsoperatoren <, <=, ==, !=, >, >=
- verkürzte Auswertung von links nach rechts (*shortcut*)

Ternärer Operator

- ⟨*condition*⟩ `?` ⟨*true-expression*⟩ `:` ⟨*false-expression*⟩
- Beispiel: `(x < 0) ? -x : x` Absolutwert von x

Bitweise logische Operationen

Integer-Datentypen doppelt genutzt:

1. Zahlenwerte (Ganzzahl, Zweierkomplement, Gleitkomma)
   arithmetische Operationen: Addition, Subtraktion usw.

2. Binärwerte mit w einzelnen Bits (Wortbreite w)
   Boole'sche Verknüpfungen, bitweise auf allen w Bits
   - Grundoperationen: Negation, UND, ODER, XOR
   - Schiebe-Operationen: shift-left, rotate-right usw.

Bitweise logische Operationen (cont.)

- Integer-Datentypen interpretiert als Menge von Bits

⇒ bitweise logische Operationen möglich

- in Java und C sind vier Operationen definiert:

Negation	`~x`	Invertieren aller einzelnen Bits
UND	`x&y`	Logisches UND aller einzelnen Bits
OR	`x|y`	–"– ODER –"–
XOR	`x^y`	–"– XOR –"–

- alle anderen Funktionen können damit dargestellt werden

  es gibt insgesamt 2^{2^n} Operationen mit n Operanden

Bitweise logische Operationen: Beispiel


```
    x = 0010 1110
    y = 1011 0011

   ~x = 1101 0001    alle Bits invertiert
   ~y = 0100 1100    alle Bits invertiert

x & y = 0010 0010    bitweises UND
x | y = 1011 1111    bitweises ODER
x ^ y = 1001 1101    bitweises XOR
```

Schiebeoperationen

- Ergänzung der bitweisen logischen Operationen
- für alle Integer-Datentypen verfügbar

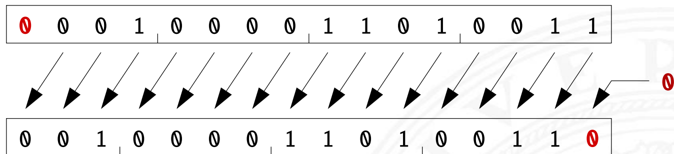
- fünf Varianten

Shift-Left	`shl`
Logical Shift-Right	`srl`
Arithmetic Shift-Right	`sra`
Rotate-Left	`rol`
Rotate-Right	`ror`

- Schiebeoperationen in Hardware leicht zu realisieren
- auf fast allen Prozessoren im Befehlssatz

Shift-Left (shl)

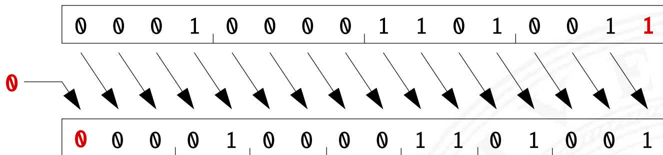
- Verschieben der Binärdarstellung von x um n bits nach links
- links herausgeschobene n bits gehen verloren
- von rechts werden n Nullen eingefügt



- in Java und C direkt als Operator verfügbar: `x << n`
- `shl` um n bits entspricht der Multiplikation mit 2^n

Logical Shift-Right (srl)

- Verschieben der Binärdarstellung von x um n bits nach rechts
- rechts herausgeschobene n bits gehen verloren
- von links werden n Nullen eingefügt



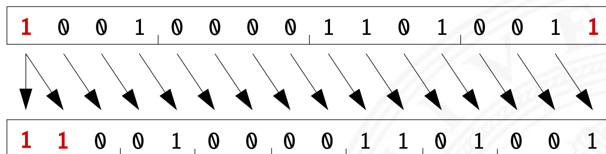
- in Java direkt als Operator verfügbar: `x >>> n`

  in C nur für `unsigned`-Typen definiert: `x >> n`

  für `signed`-Typen nicht vorhanden

Arithmetic Shift-Right (sra)

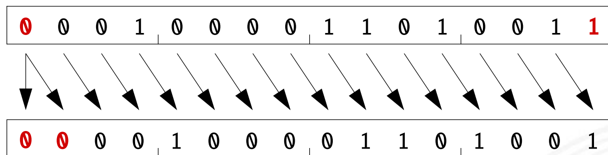
- Verschieben der Binärdarstellung von x um n bits nach rechts
- rechts herausgeschobene n bits gehen verloren
- von links wird n-mal das MSB (Vorzeichenbit) eingefügt
- Vorzeichen bleibt dabei erhalten (gemäß Zweierkomplement)



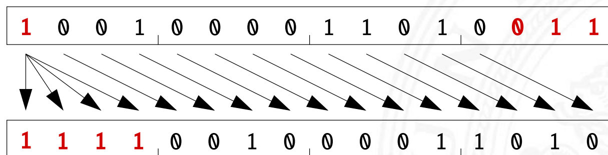
- in Java direkt als Operator verfügbar: `x >> n`
  in C nur für `signed`-Typen definiert: `x >> n`
- `sra` um n bits ist ähnlich der Division durch 2^n

Arithmetic Shift-Right: Beispiel

- `x >> 1` aus `0x10D3` (4 307) wird `0x0869` (2 153)



- `x >> 3` aus `0x90D3` (-28 460) wird `0xF21A` (-3 558)



Arithmetic Shift-Right: Division durch Zweierpotenzen?

- positive Werte: `x >> n` entspricht Division durch 2^n
- negative Werte: `x >> n` ähnlich Division durch 2^n
  aber Ergebnis ist zu klein!

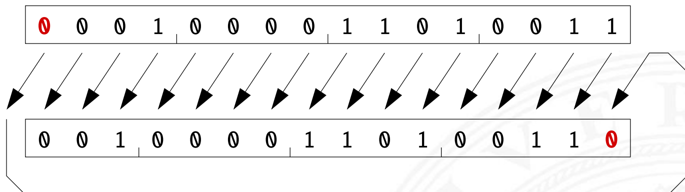
- gerundet in Richtung negativer Werte statt in Richtung Null:

  1111 1011 (-5)
  1111 1101 (-3)
  1111 1110 (-2)
  1111 1111 (-1)

- in C: Kompensation durch Berechnung von `(x + (1<<k)-1) >> k`
  Details: Bryant, O'Hallaron [BO15]

Rotate-Left (`rol`)

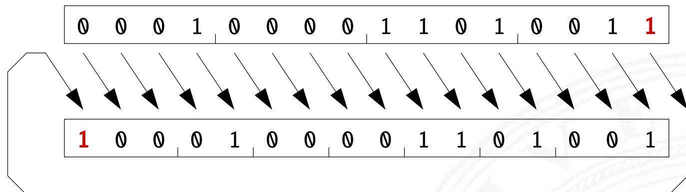
- Rotation der Binärdarstellung von x um n bits nach links
- herausgeschobene Bits werden von rechts wieder eingefügt



- in Java und C nicht als Operator verfügbar
- Java: `Integer.rotateLeft( int x, int distance )`

Rotate Right (ror)

- Rotation der Binärdarstellung von x um n bits nach rechts
- herausgeschobene Bits werden von links wieder eingefügt



- in Java und C nicht als Operator verfügbar
- Java: `Integer.rotateRight( int x, int distance )`

Shifts statt Integer-Multiplikation

- Integer-Multiplikation ist auf vielen Prozessoren langsam oder evtl. gar nicht als Befehl verfügbar

- Add./Subtraktion und logische Operationen: typisch 1 Takt
  Shift-Operationen: meistens 1 Takt

⇒ eventuell günstig, Multiplikation mit Konstanten durch entsprechende Kombination aus shifts+add zu ersetzen

- Beispiel: $9 \cdot x = (8+1) \cdot x$ ersetzt durch `(x << 3) + x`
- viele Compiler erkennen solche Situationen

Beispiel: bit-set, bit-clear

Bits an Position p in einem Integer setzen oder löschen?

- Maske erstellen, die genau eine 1 gesetzt hat
- dies leistet `(1 << p)`, mit $0 \leq p \leq w$ bei Wortbreite w

```
public int bit_set( int x, int pos ) {
  return x |  (1 << pos);      // mask = 0...010...0
}

public int bit_clear( int x, int pos ) {
  return x & ~(1 << pos);      // mask = 1...101...1
}
```

Beispiel: Byte-Swapping *network to/from host*

Linux: `/usr/include/bits/byteswap.h` (distributionsabhängig)

```
...
/* Swap bytes in 32 bit value.  */
#define __bswap_32(x) \
  ((((x) & 0xff000000) >> 24) | (((x) & 0x00ff0000) >>  8) |\
   (((x) & 0x0000ff00) <<  8) | (((x) & 0x000000ff) << 24))
...
```

Linux: `/usr/include/netinet/in.h`

```
...
#  if __BYTE_ORDER == __LITTLE_ENDIAN
#   define ntohl(x) __bswap_32 (x)
#   define ntohs(x) __bswap_16 (x)
#   define htonl(x) __bswap_32 (x)
#   define htons(x) __bswap_16 (x)
#  endif
...
```

Beispiel: RGB-Format für Farbbilder

Farbdarstellung am Monitor / Bildverarbeitung?

- Matrix aus $w \times h$ Bildpunkten
- additive Farbmischung aus Rot, Grün, Blau
- pro Farbkanal typischerweise 8-bit, Wertebereich $0 \ldots 255$
- Abstufungen ausreichend für (untrainiertes) Auge

- je ein 32-bit Integer pro Bildpunkt
- typisch: `0x00RRGGBB` oder `0xAARRGGBB`
- je 8-bit für Alpha/Transparenz, rot, grün, blau

- `java.awt.image.BufferedImage(TYPE_INT_ARGB)`

Beispiel: RGB-Rotfilter


```
public BufferedImage redFilter( BufferedImage src ) {
  int     w = src.getWidth();
  int     h = src.getHeight();
  int type = BufferedImage.TYPE_INT_ARGB;
  BufferedImage dest = new BufferedImage( w, h, type );

  for( int y=0; y < h; y++ ) {           // alle Zeilen
    for( int x=0; x < w; x++ ) {         // von links nach rechts
      int  rgb = src.getRGB( x, y );     // Pixelwert bei (x,y)
                                         // rgb = 0xAARRGGBB
      int  red = (rgb & 0x00FF0000);     // Rotanteil maskiert
      dest.setRGB( x, y, red );
    }
  }
  return dest;
}
```

Beispiel: RGB-Graufilter


```
public BufferedImage grayFilter( BufferedImage src ) {
  ...
  for( int y=0; y < h; y++ ) {   // alle Zeilen
    for( int x=0; x < w; x++ ) { // von links nach rechts
      int   rgb = src.getRGB( x, y );        // Pixelwert
      int   red = (rgb & 0x00FF0000) >>>16; // Rotanteil
      int green = (rgb & 0x0000FF00) >>> 8; // Grünanteil
      int  blue = (rgb & 0x000000FF);        // Blauanteil

      int  gray = (red + green + blue) / 3; // Mittelung

      dest.setRGB( x, y, (gray<<16)|(gray<<8)|gray );
    }
  }
  ...
}
```

Beispiel: Bitcount – while-Schleife

Anzahl der gesetzten Bits in einem Wort?

- Anwendung z.B. für Kryptalgorithmen (Hamming-Abstand)
- Anwendung für Medienverarbeitung

```
public static int bitcount( int x ) {
  int count = 0;

  while( x != 0 ) {
    count += (x & 0x00000001);  // unterstes bit addieren
    x = x >>> 1;                // 1-bit rechts-schieben
  }

  return count;
}
```

Beispiel: Bitcount – parallel, tree

- Algorithmus mit Schleife ist einfach aber langsam
- schnelle parallele Berechnung ist möglich

```
int BitCount(unsigned int u)
{ unsigned int uCount;
  uCount = u - ((u >> 1) & 033333333333)
             - ((u >> 2) & 011111111111);
  return ((uCount + (uCount >> 3)) & 030707070707) % 63;
}
```

- `java.lang.Integer.bitCount()`

```
public static int bitCount(int i) {
    // HD, Figure 5-2
    i = i - ((i >>> 1) & 0x55555555);
    i = (i & 0x33333333) + ((i >>> 2) & 0x33333333);
    i = (i + (i >>> 4)) & 0x0f0f0f0f;
    i = i + (i >>> 8);
    i = i + (i >>> 16);
    return i & 0x3f;
}
```

Beispiel: Bitcount – parallel, tree (cont.)

- viele Algorithmen: bit-Maskierung und Schieben
  - `http://gurmeet.net/puzzles/fast-bit-counting-routines`
  - `http://graphics.stanford.edu/~seander/bithacks.html`
  - `https://tekpool.wordpress.com/category/bit-count/`
  - D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming*: Volume 4A, Combinational Algorithms: Part1, Abschnitt 7.1.3 [Knu09]
- viele neuere Prozessoren/DSPs: eigener bitcount-Befehl

Tipps & Tricks: Rightmost bits
D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming*, Vol 4.1 [Knu09]

Grundidee: am weitesten rechts stehenden 1-Bits / 1-Bit Folgen erzeugen Überträge in arithmetischen Operationen

- Integer x, mit $x = (\alpha\, 0\, [1]^a\, 1\, [0]^b)_2$

  beliebiger Bitstring α, eine Null, dann $a+1$ Einsen und b Nullen, mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$.
- Ausnahmen: $x = -2^b$ und $x = 0$

$$
\Rightarrow \quad \begin{aligned}
x &= (\alpha\, 0\, [1]^a\, 1\, [0]^b)_2 \\
\overline{x} &= (\overline{\alpha}\, 1\, [0]^a\, 0\, [1]^b)_2 \\
x-1 &= (\alpha\, 0\, [1]^a\, 0\, [1]^b)_2 \\
-x &= (\overline{\alpha}\, 1\, [0]^a\, 1\, [0]^b)_2
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \overline{x} + 1 = -x = \overline{x-1}$$

Literatur

[BO15] R.E. Bryant, D.R. O'Hallaron:
Computer systems – A programmers perspective.
3rd global ed., Pearson Education Ltd., 2015.
ISBN 978–1–292–10176–7. `csapp.cs.cmu.edu`

[TA14] A.S. Tanenbaum, T. Austin: *Rechnerarchitektur – Von der digitalen Logik zum Parallelrechner*.
6. Auflage, Pearson Deutschland GmbH, 2014.
ISBN 978–3–8689–4238–5

Literatur (cont.)

[Knu09] D.E. Knuth: *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 1, Bitwise Tricks & Techniques; Binary Decision Diagrams*. Addison-Wesley Professional, 2009. ISBN 978–0–321–58050–4

[Hei05] K. von der Heide: *Vorlesung: Technische Informatik 1 — interaktives Skript*. Universität Hamburg, FB Informatik, 2005. `tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2004ws/vorlesung/t1`