Musterlösung zu Aufgabe 4.5

Teilbarkeitsregeln*: Aus dem Dezimalsystem kennen Sie wahrscheinlich die Regel, dass eine ganze Zahl durch* 3 *teilbar ist, wenn Ihre Quersumme durch* 3 *teilbar ist. Z.B. ist* 4458 *durch* 3 *teilbar, weil* $4 + 4 + 5 + 8 = 21$ *durch* 3 *teilbar ist. Ebenso gibt es die Regel, dass eine Zahl durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Etwas komplizierter ist die folgende Regel: Eine Zahl ist durch* 11 *teilbar, wenn ihre sog. alternierende Quersumme durch* 11 *teilbar ist. Z.B. ist* 2838 *durch* 11 *teilbar, weil* $2 - 8 + 3 - 8 = -11$ *durch* 11 *teilbar ist.*

(a) Überlegen Sie sich eine entsprechende Regel, mit der Sie prüfen können, ob eine Zahl geschrieben im Dualsystem durch 3 *teilbar ist. Probieren Sie einfach ein wenig herum, dann werden Sie wahrscheinlich auf die richtige Lösung kommen. Lässt sich im Dualsystem leicht entscheiden, ob eine Zahl durch* 8 *teilbar ist?*

(b) Angenommen, die Zahl liegt im Hexadezimalsystem vor. Kann man dann leicht entscheiden, ob Sie durch 3 *bzw.* 5 *teilbar ist?*

Bemerkung: *Sie brauchen ihre Regeln nicht mathematisch zu begründen. Geben Sie aber für alle vier Fälle ein nichttriviales Beispiel an (mindestens 10 Stellen im Dualsystem und 4 Stellen im Hexadezimalsystem).*

Zunächst eine Bemerkung: In welchem Zahlensystem man die Quersumme bildet, spielt keine Rolle. Im Folgenden nehmen wir das Dezimalsystem.

(a) Zum Herumprobieren kann man einige kleine Zahlen nehmen, z.B.

dezimal	binär	Quers	alt. Qu.
6	0110	2	0
7	0111	3	1
8	1000	1	1
9	1001	2	0
21	10101	3	3
45	101101	4	0

Das deutet darauf hin, dass die alternierende Quersumme eine gute Wahl ist. Versuchen wir es mit einer größeren Zahl $5175_{10} = (1\,0100\,0011\,0111)_2$ mit der alternierenden Quersumme 3. In der Tat ist $5175 = 3 \cdot 1725$. Damit haben wir unsere Regel gefunden (mathematisch zu beweisen brauchen wir sie ja zum Glück nicht).

Teilbarkeit durch 8: Das geht ebenso wie im Dezimalsystem bei der Teilbarkeit durch 1000. Wenn die drei niederwertigsten Stellen Nullen sind, klappt es.

(b) Zum Herumprobieren nehmen wir wieder einige kleinere Zahlen nehmen, z.B.

dezimal	hex	Quers	alt. Qu.
17	11	2	0
18	12	3	-1
19	13	4	-2
20	14	5	-3
21	15	6	-4
45	2D	15	-11

Das deutet darauf hin, dass es sowohl bei Teilbarkeit durch 3 als auch bei Teilbarkeit durch 5 die normale Quersumme tut. Versuchen wir es auch hier mit $5175_{10} = 1437_{16}$ und der durch 3 und 5 teilbaren Quersumme 15, wie es ja auch sein soll.

In Kürze die Mathematik dahinter:

Sei n eine positive ganze Zahl, B die Basis, in der sie geschrieben wird (also, z.B. 2, 10 oder 16) und T die Zahl, von der wir wissen möchten, ob n durch T teilbar ist. Es muss dann also gelten $0 \equiv n \bmod T$. Zur Erinnerung: die mod-Funktion liefert den Rest, wenn man n durch T teilt, oder korrekter, eine der Zahlen R, so dass $n - R$ durch T teilbar ist. D.h. es gilt $15 \equiv 15 \bmod 16$ aber ebenso $-1 \equiv 15 \bmod 16$ oder $31 \equiv 15 \bmod 16$.

Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv n \bmod T \\ &\equiv (z_0 + z_1\, B + z_2\, B^2 + \ldots + z_k\, B^k) \bmod T \\ &\equiv (z_0 + z_1\, (B \bmod T) + z_2\, (B^2 \bmod T) + \ldots + z_k\, (B^k \bmod T)) \bmod T \end{aligned}$$

Wenn man beachtet, dass gilt $(a \cdot b) \bmod m = (a \bmod m) \cdot (b \bmod m)$ wird die Summe rechts besonders einfach, wenn gilt $-1 \equiv B \bmod T$ oder $0 \equiv B^m \bmod T$ für irgendein m oder $1 \equiv B \bmod T$.

Im ersten Fall gilt nämlich:

$$(-1)^i \equiv B^i \bmod T \quad \text{für alle i}$$

und obige Gleichung reduziert sich zu

$$0 \equiv (z_0 - z_1 + z_2 - \ldots + z_k) \bmod T$$

also zur Prüfung der alternierenden Quersumme wie bei $B = 2, T = 3$, denn es gilt ja $2 \equiv 2 \bmod 3 \equiv -1 \bmod 3$.

Im zweiten Fall reduziert sich die Summe zu

$$0 \equiv (z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_m) \bmod T$$

Weil 8 eine Potenz von 2, ist diese Regel oben anwendbar. Die Summe kann ja bei 3 Ziffern im Dualsystem maximal 3 werden und 0 wird sie modulo 8 nur, wenn alle Ziffern 0 sind.

Im dritten Fall reduziert sich die Summe zu

$$0 \equiv (z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_k) \bmod T$$

also zur normalen Quersumme. Wegen $1 \equiv 16 \bmod 3$ und $1 \equiv 16 \bmod 5$ (s.o.) ist die Regel anwendbar. Wegen $-1 \equiv 16 \bmod 17$ könnte man im Hexadezimalsystem aber mit der alternierenden auch leicht auf Teilbarkeit durch 17 prüfen. Fast so einfach ließe sich im Dualsystem auf Teilbarkeit durch 5 prüfen, wenn man immer zwei Binärziffern zusammenfasst, also quasi in einem System mit $B = 4$ rechnet ($-1 \equiv 4 \bmod 5$).

All das war aber für die Aufgabe nicht gefordert und alle Beteiligten sollten froh darüber sein.