

# Einführung in die Robotik

**Jianwei Zhang**  
zhang@informatik.uni-hamburg.de

**T | A** | **M | S** Universität Hamburg  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Department Informatik  
**Technische Aspekte Multimodaler Systeme**

12. Juni 2012

## Gliederung

- Allgemeine Informationen
- Einführung
- Koordinaten eines Manipulators
- Kinematik-Gleichungen
- Inverse Kinematik von Manipulatoren
- Differentielle Bewegungen mit homogenen Transformationen
- Jacobi-Matrix eines Manipulators
- Aufgabenbeschreibung
- Roboterprogrammierung auf drei Ebenen
- Trajektoriegenerierung
- Trajektorien-generierung
- Einführung in RCCL
- Dynamik**

## Gliederung (cont.)

Probleme der Dynamik von Manipulatoren  
 Beispiel für einen zweigelenkigen Manipulator  
 Lagrange'sche Gleichungen

Roboterregelung

Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung

Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung

Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung

Architekturen sensorbasierter intelligenter Systeme

Aus- und Rückblick

## Probleme der Dynamik von Manipulatoren

### ▶ Vorwärtsdynamik:

- ▶ *Vorgabe*: Gelenkkräfte/-momente;
- ▶ *Gesuchte*: Bewegungsparameter;
- ▶ *Anwendung*: Simulation eines Robotermodells.

### ▶ Inverse Dynamik:

- ▶ *Vorgabe*: gewünschte Roboterbewegung;
- ▶ *Gesuchte*: erforderliche Gelenkkräfte/-momente;
- ▶ *Anwendung*: Modell-basierte Regelung eines Roboters.

$$\begin{aligned} \tau(t) &\rightarrow \text{Direkte Dynamikgleichung} \rightarrow \mathbf{q}(t), (\dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)) \\ \mathbf{q}(t) &\rightarrow \text{Inverse Dynamikgleichung} \rightarrow \tau(t) \end{aligned}$$

NICHT parallel wie das Problem der Kinematik, ist die inverse Dynamik einfacher zu lösen als die direkte Dynamik.

## Probleme der Dynamik von Manipulatoren

### Zwei Berechnungsverfahren:

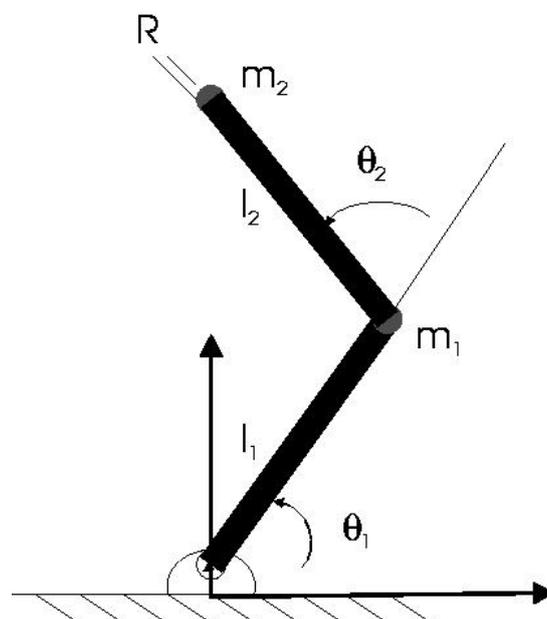
- ▶ Analytische Methoden:  
aufgebaut auf Lagrange'schen Gleichungen
- ▶ Synthetische Methoden:  
Anwendung der Newton-Euler'schen Gleichungen

Ein Problem mit der Rechenzeit:

Komplexität zur Auswertung des Lagrange-Euler-Modells (siehe die kommenden Seiten):  $O(n^4)$  wobei  $n$  die Anzahl der Gelenke ist.

$n = 6$ : 66,271 Multiplikationen und 51,548 Additionen.

## Beispiel für einen zweigelenkigen Manipulator



## Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - I

nach dem Newton's zweiten Gesetz sind die Kräfte an dem Schwerpunkt des Glieder 1 und 2 jeweils:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$$

wobei

$$\mathbf{r}_1 = 1/2 l_1 (\cos \theta_1 \vec{i} + \sin \theta_1 \vec{j})$$

$$\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}_1 + 1/2 l_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) \vec{i} + \sin(\theta_1 + \theta_2) \vec{j}]$$

## Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - I

Euler'sche Gleichungen:

$$\tau_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_1 \times I_1 \dot{\omega}_1$$

$$\tau_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \times I_2 \dot{\omega}_2$$

wobei

$$I_1 = m_1 l_1^2 / 12 + m_1 R^2 / 4$$

$$I_2 = m_2 l_2^2 / 12 + m_2 R^2 / 4$$

## Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - II

Die Winkelgeschwindigkeiten und -Beschleunigungen sind:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\theta}_1 \\ \omega_2 &= \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_1 &= \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\omega}_2 &= \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\end{aligned}$$

Da  $\omega_i \times \mathbf{l}_i \omega_i = 0$ , gilt es dann für die Kraftmomente an dem Schwerpunkt des Glieder 1 und 2:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= I_1 \ddot{\theta}_1 \\ \tau_2 &= I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\end{aligned}$$

$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \tau_1, \tau_2$  werden für die Kraft- und Kraftmoment-Balance verwendet. Dadurch werden die Kraftmomente direkt an Gelenk 1 und 2 gelöst.

## Lagrange'sche Gleichungen

Die lagrange'sche Funktion  $L$  wird definiert als die Differenz zwischen der kinetischen Energie  $K$  und der potentiellen Energie  $P$  des Systems:

$$L = K - P$$

**Satz:** Die Bewegungsgleichungen für ein mechanisches System mit allgemeinen Koordinaten  $\mathbf{q} \in \Theta^n$  und der lagrange'schen Funktion  $L$  sind gegeben über:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i, \quad i = 1, \dots, n$$

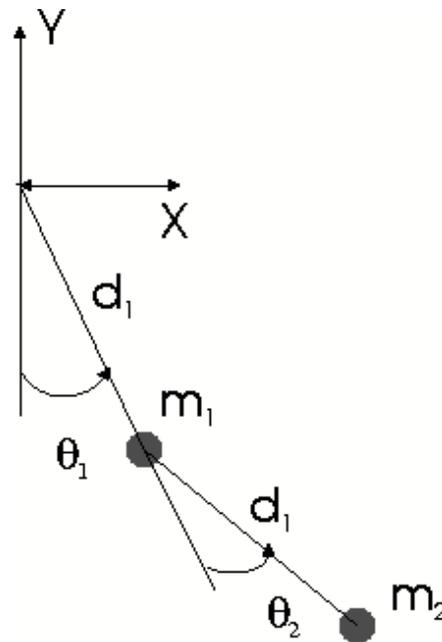
wobei

$q_i$ : die Koordinaten, mit den die kinetische und potentielle Energie dargestellt werden;

$\dot{q}_i$ : die entsprechende Geschwindigkeit;

$F_i$ : die entsprechende Kraft oder das entsprechende Kraftmoment, abhängig davon, ob  $q_i$  ein linearer oder Winkel-Geschwindigkeit ist.

## Besipiel 2 für einen zweigelenkigen Manipulator



## Langrage'sche Verfahren für das Beispiel - I

Die kinetische Energie des Massen  $m_1$  ist:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

Die potentielle Energie ist:

$$P_1 = -m_1 g d_1 \cos(\theta_1)$$

Die kartesischen Positionen sind:

$$\begin{aligned} x_2 &= d_1 \sin(\theta_1) + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ y_2 &= -d_1 \cos(\theta_1) - d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

## Langrange'sche Verfahren für das Beispiel - II

Die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeiten sind:

$$\dot{x}_2 = d_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = d_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

Das Quadrat der Geschwindigkeitsgröße ist:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

Die kinetische Energie des 2. Gelenks ist:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Die potentielle Energie des 2. Gelenks ist:

$$P_2 = -m_2 g d_1 \cos(\theta_1) - m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

## Langrange'sche Verfahren für das Beispiel - III

Die Langrange'sche Funktion ist:

$$L = (K_1 + K_2) - (P_1 + P_2)$$

Das Kraftmoment auf Gelenk 1 bzw. 2 ist jeweils:

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

## Langrange'sche Verfahren für das Beispiel - III

$\tau_1$  und  $\tau_2$  werden schließlich dargestellt als:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 \\ & + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{121}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 \\ & + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{221}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_2 \end{aligned}$$

## Langrange'sche Verfahren für das Beispiel - III

wobei

$D_{ii}$ : die effektive Trägkeit (inertia) auf Gelenk  $i$ ;

$D_{ij}$ : die Kopplung-Trägkeit zwischen Gelenk  $i$  und  $j$ ;

$D_{ijj}$ : die Koeffizienten der zentripetalen Kraft auf Gelenk  $i$  wegen der Geschwindigkeit des Gelenk  $j$ ;

$D_{iik}(D_{iki})$ : die Koeffizienten der Coriolis-Kraft auf Gelenk  $i$  wegen der Geschwindigkeiten des Gelenk  $i$  und  $k$ ;

$D_j$ : die Schwerkraft auf Gelenk  $i$ .

## Allgemeine dynamische Gleichungen eines allgemeinen Manipulators - I

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

$M(\Theta)$ : die lageabhängige  $n \times n$ -Massenmatrix eines Manipulators  
Für das obige Beispiel:

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

$V(\Theta, \dot{\Theta})$ : ein  $n \times 1$ -Vektor der Zentripetal- und Coriolis-Terme  
Für das obige Beispiel:

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{121}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\ D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{221}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

## Allgemeine dynamische Gleichungen eines allgemeinen Manipulators - I

Ein Term wie  $D_{111}\dot{\theta}_1^2$  wird von einer zentrifugalen Kraft verursacht;  
Ein Term wie  $D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$  wird von einer Coriolis-Kraft verursacht  
und beinhaltet immer das Produkt der beiden Geschwindigkeiten.

$G(\Theta)$ : der Schwerkraft-Term, hängt immer von  $\Theta$  ab.

Für das obige Beispiel:

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$