

# Einführung in die Robotik

**Jianwei Zhang**  
zhang@informatik.uni-hamburg.de

**T | A** Universität Hamburg  
**M | S** Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Department Informatik  
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

10. April 2012

## Gliederung

Allgemeine Informationen

Einführung

**Koordinaten eines Manipulators**

Warum Koordinaten-Transformation

Homogene Transformation

Verknüpfung der Drehmatrizen

Inverse Transformationen

Gleichung der Transformation

Zusammenfassung der homogenen Transformationen

Kinematik-Gleichungen

Inverse Kinematik von Manipulatoren

Differentielle Bewegungen mit homogenen Transformationen

Jacobi-Matrix eines Manipulators

## Gliederung (cont.)

- Aufgabenbeschreibung
- Roboterprogrammierung auf drei Ebenen
- Trajektoriegenerierung
- Trajektorien-generierung
- Einführung in RCCL
- Dynamik
- Roboterregelung
- Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung
- Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung
- Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung
- Architekturen sensorbasierter intelligenter Systeme
- Aus- und Rückblick

## Koordinaten eines Manipulators

- ▶ Gelenk-Koordinaten:  
Ein Vektor  $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T$   
(eine Roboter-Konfiguration)
- ▶ Endeffektor-Koordinaten  
(Objekt-Koordinaten):  
Ein Vektor  $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$
- ▶ Beschreibung der Orientierungen:
  - ▶ Euler-Winkel  $\phi, \theta, \psi$
  - ▶ Drehmatrix:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

## Warum Koordinaten-Transformation (1)

- ▶ Das direkte kinematische Problem:  
Wenn die Gelenkwerte und die geometrischen Parameter aller Gelenke eines Manipulators gegeben sind, wie können die Position und Orientierung des Manipulator-Endeffektors bestimmt werden?

## Warum Koordinaten-Transformation (1) (cont.)

- ▶ Das inverse kinematische Problem:  
Seien sowohl eine gewünschte Position als auch Orientierung des Manipulator-Endeffektors und die geometrischen Parameter aller Gelenke gegeben, kann der Manipulator diese Position / Orientierung erreichen? Und wenn ja, wie viele Manipulator - Konfigurationen können diese Konditionen erfüllen?  
(*Ein Beispiel:* Ein sich auf einer Ebene bewegender Zwei-Gelenk-Manipulator)

## Warum Koordinaten-Transformation (2)

- ▶ Überführung von Frames:  
Frame: ein Bezugskoordinatensystem  
*Typische Frames:*
  - ▶ Roboterbasis
  - ▶ Endeffektor
  - ▶ Tisch (Welt)
  - ▶ Objekt
  - ▶ Kamera
  - ▶ Bildschirm
  - ▶ ...

Frame-Transformationen führen einen Frame in einen anderen über.

## Homogene Transformation

Eine Raum-Transformation  $H$  ist eine  $4 \times 4$  Matrix, die translatorische, rotatorische und perspektivische Transformationen darstellen kann.

- ▶ Translationsvektor:  
 $T$ : ein  $3 \times 1$  Vektor  $T = [p_x, p_y, p_z]^T$
- ▶ Rotationsmatrizen:  
 $R$ : ein  $3 \times 3$  Matrix durch beliebige Verknüpfung der Drehmatrizen um die  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achse

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

## Homogene Transformation

- Homogene Transformationsmatrizen:

$$H = \begin{bmatrix} R & T \\ P & S \end{bmatrix}$$

wobei  $P$  die perspektivische Transformation und  $S$  die Skalierung beschreibt.

## Translatorische Transformation

Eine Translation mit einem Vektor  $[p_x, p_y, p_z]^T$  wird von einer Transformation  $H$  dargestellt:

$$H = T_{(p_x, p_y, p_z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Rotatorische Transformation

(verkürzte Schreibweise:  $S : \sin$ ,  $C : \cos$ )

Die zur Drehung um die  $x$ -Achse mit einem Winkel  $\psi$  zugehörige Transformation:

$$R_{x,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Rotatorische Transformation

Die zur Drehung um die  $y$ -Achse mit einem Winkel  $\theta$  zugehörige Transformation:

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Rotatorische Transformation

Die zur Drehung um die z-Achse mit einem Winkel  $\phi$  zugehörige Transformation:

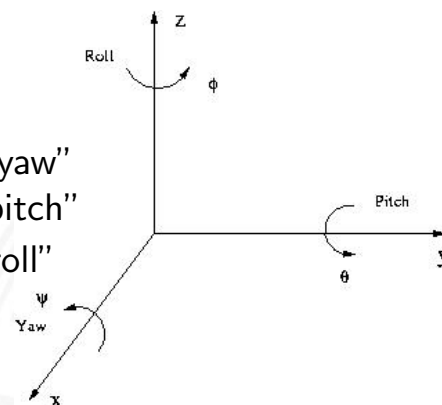
$$R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Bei mehreren Drehungen

Sequentielle Linksmultiplikationen der Transformationsmatrizen nach der Reihenfolge der Drehungen.

Ein Beispiel:

1. Eine Drehung  $\psi$  um die x-Achse  $R_{x,\psi}$  - "yaw"
2. Eine Drehung  $\theta$  um die y-Achse  $R_{y,\theta}$  - "pitch"
3. Eine Drehung  $\phi$  um die z-Achse  $R_{z,\phi}$  - "roll"



## Verknüpfung der Drehmatrizen

$$R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi & 0 \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Bemerkung:* Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$AB \neq BA$$

## Koordinaten-Frames

Sie werden über die Elemente der homogenen Transformation als vier Vektoren dargestellt.

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$



## Inverse Transformationen

Die Inverse einer Drehmatrix ist einfach ihre Transponierte:

$$R^{-1} = R^T \text{ und } RR^T = I$$

wobei  $I$  die Identitätsmatrix ist.

Die Inverse von (1) ist:

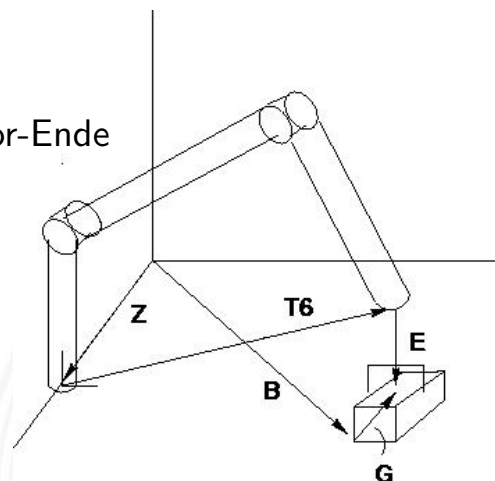
$$H^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_2 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  und  $\mathbf{p}$  die vier Spaltenvektoren von (1) sind und  $\cdot$  das Skalarprodukt von Vektoren darstellt.

## Relativtransformationen

Man hat die folgenden Transformationen:

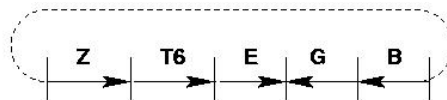
- ▶  $Z$ : Welt  $\rightarrow$  Manipulator-Basis
- ▶  $T_6$ : Manipulator-Basis  $\rightarrow$  Manipulator-Ende
- ▶  $E$ : Manipulator-Ende  $\rightarrow$  Endeffektor
- ▶  $B$ : Welt  $\rightarrow$  Objekt
- ▶  $G$ : Objekt  $\rightarrow$  Endeffektor



## Gleichung der Transformation

Es gibt zwei Beschreibungen der Position des Endeffektors, eine in Bezug auf das Objekt und die andere auf den Manipulator. Sie beschreiben die gleiche Sache:

$$ZT_6E = BG$$



Um die Manipulator-Transformation zu finden:

$$T_6 = Z^{-1}BGE^{-1}$$

Um die Position des Objekts zu bestimmen:

$$B = ZT_6EG^{-1}$$

Dies wird auch als kinematische Kette bezeichnet.

## Zusammenfassung der homogenen Transformationen

- ▶ Eine homogene Transformation beschreibt die Position und Orientierung eines Koordinaten-Frames im Raum.
- ▶ Wenn der Koordinaten-Frame bezüglich eines Festkörpers definiert wird, ist die Position und Orientierung des Festkörpers auch eindeutig spezifiziert.
- ▶ Die Beschreibung eines Objektes A kann über eine Homogene Transformation bezüglich des Objektes B abgeleitet werden. Umgekehrt geht es auch mit der inversen Transformation.



## Zusammenfassung der homogenen Transformationen

- ▶ Mehrere Translationen und Rotationen können multipliziert werden. Es gilt:
  - ▶ Wenn die Rotationen / Translationen bezüglich des aktuellen neu definierten (oder veränderten) Koordinatensystems durchgeführt werden, müssen die entsprechenden neu dazukommenden Transformationsmatrizen von rechts dran multipliziert werden.
  - ▶ Wenn sie alle bezüglich des festen Referenz-Koordinatensystems durchgeführt werden, müssen die Transformationsmatrizen von links dran multipliziert werden.
- ▶ Eine homogene Transformation kann in eine Rotation und in eine Translation zerlegt werden.