

# 64-544 Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

<http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2012ss/vorlesung/GdSR>

Jianwei Zhang

**T | A** Universität Hamburg  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
**M | S** Fachbereich Informatik  
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Sommersemester 2012

## Gliederung

1. Einführung
2. Grundlagen der Robotik
3. Elementares der Sensorik
4. Verarbeitung von Scandaten
5. Rekursive Zustandsschätzung
6. Fuzzy-Logik
7. Steuerungsarchitekturen

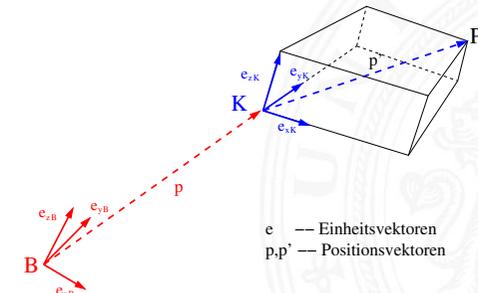
## Agenda

### 2. Grundlagen der Robotik

Grundbegriffe  
 Roboterklassifikation  
 Koordinatensysteme  
 Homogene Transformationen  
 Verknüpfung der Drehmatrizen  
 Koordinaten-Frames  
 Zusammenfassung der homogenen Transformationen  
 Roboterkinematik

## Koordinatensysteme

Die Lage von Gegenständen, also ihre **Position** und **Orientierung** im euklidischen Raum, lässt sich beschreiben durch Angabe eines kartesischen Koordinatensystems (KS) hier K und der Angabe der Transformation zwischen diesem und dem Ursprungs-Koordinatensystem hier B.



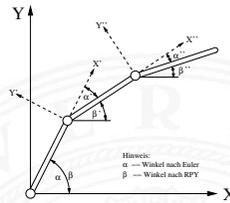
## Beschreibung von Position und Orientierung eines Objektes

Position (Objekt-Koordinaten):

- ▶ gegeben durch  $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T \in \mathcal{R}^3$

Orientierung:

- ▶ Euler-Winkel  $\phi, \theta, \psi$ 
  - ▶ Drehungen werden nacheinander um die Achsen der neuen Koordinatensysteme durchgeführt; z. B.  $ZX'Z''$
  - ▶ Dreh- oder Rotationsmatrix  $R \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ :
 
$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$
  - ▶ redundant; 9 Parameter bei  $f=3$
- ▶ Roll-Pitch-Yaw
  - ▶ auf Objektkoordinatensystem bezogen (in Luft- u. Seefahrt üblich)
  - ▶ Rotationen erfolgen auf die unveränderten Achsen (X Rollen, Y Nicken, Z Gieren)



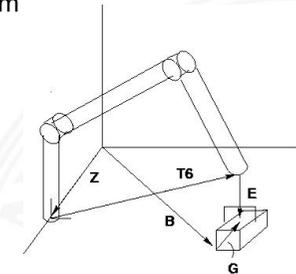
## Koordinaten-Transformation

▶ Überführung von Koordinatensystemen:

Frame: ein Bezugskoordinatensystem

Typische Frames:

- ▶ Roboterbasis
- ▶ Endeffektor
- ▶ Tisch (Welt)
- ▶ Objekt
- ▶ Kamera
- ▶ Bildschirm
- ▶ ...



Frame-Transformationen überführen einen Frame in einen anderen.

## Koordinaten-Transformation (cont.)

- ▶ Matrizenmultiplikation mit einer  $3 \times 3$ -Matrix kann Rotation, Skalierung oder Scherung beschreiben
  - ▶ **Aber:** Verschiebung (Translation) erfordert Vektoraddition
- ▶ Dies kann umgangen werden, indem eine weitere Spalte zur Matrix hinzugefügt wird.
  - ▶ **Aber:** Die Matrix ist dann nicht mehr invertierbar
- ▶ Übergang nach  $\mathcal{R}^4$  ( $4 \times 4$ -Matrix), um sowohl Rotation, Translation, Scherung, Projektion, lokale und komplette Skalierung zu beschreiben
- ▶ Verwendung homogener Koordinaten

## Homogene Koordinaten

- ▶ *Homogene Koordinaten* sind bekannt aus der Computergrafik, um Probleme in der Matrixberechnung zu umgehen
- ▶ Die Punkte eines  $n$ -dimensionalen Raums werden in einem  $n+1$  dimensionalen Raum dargestellt
- ▶ Aus  $p = (x, y, z) \in \mathcal{R}^3$  wird  $p' = (hx, hy, hz, h) \in \mathcal{R}^4$ , wobei  $h \neq 0 \in \mathcal{R}$   
Beispiel:  
 $(2, 5, 4) \in \mathcal{R}^3 \rightarrow \dots, (1, 2.5, 2, 0.5), \dots, (2, 5, 4, 1), \dots, (4, 10, 8, 2), \dots \in \mathcal{R}^4$
- ▶ In der Robotik ist  $h = 1$ , was einer direkten Projektion zwischen  $n$ - und  $(n+1)$ -dimensionalem Raum entspricht
- ▶  $h$  ist eine Art Skalierung

## Homogene Transformationen

$$H = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \text{Rotation} \\ \text{Scherung} \\ \text{lokale Skalierung} \end{array} & \begin{array}{l} \text{Translation} \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \\ \\ \text{Projektion} \end{array} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{Skalierung} \end{array} \end{array} \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{l} 3 \\ \times \\ 3 \\ \hline 1 \times 3 \end{array} & \begin{array}{l} 3 \\ \times \\ 1 \\ \hline 1 \times 1 \end{array} \end{array} \right]$$

## Homogene Transformationen (cont.)

- ▶ In der Robotik ist man nur an Rotation und Translation interessiert Daher ergibt sich:

$$H = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \text{Rotation} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} \text{Translation} \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} 0 \ 0 \ 0 \end{array} & \begin{array}{l} \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \right]$$

- ▶ somit aus  $\vec{p}$  und  $R$ :  $H = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{4 \times 4}$
- ▶ Verkettung mehrerer  $H$  über Matrixmultiplikation
- ▶ nicht kommutativ, d.h.  $A \cdot B \neq B \cdot A$

## Translation

Verschieben um Vektor  $[p_x, p_y, p_z]^T$ :

$$T_{(p_x, p_y, p_z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}'^T &= T_{(p_x, p_y, p_z)} \cdot \vec{a}^T \\ &= (a_x + p_x, a_y + p_y, a_z + p_z, 1)^T \end{aligned}$$

## Rotation um x-Achse

Drehung um die x-Achse um den Winkel  $\psi$ :

$$R_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}'^T &= R_x(\psi) \cdot \vec{a}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \cdot \cos(\psi) - a_z \cdot \sin(\psi) \\ a_y \cdot \sin(\psi) + a_z \cdot \cos(\psi) \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Exkurs: Rotation in der euklidischen Ebene $\mathcal{R}^2$

- Drehung eines Vektors  $\vec{p}_1$  in  $\mathcal{R}^2$  auf dem Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn um einen festen Ursprung um den Winkel  $\theta$ .

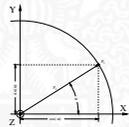
$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = \cos(\alpha) \\ y_1 = \sin(\alpha) \end{matrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = R(\vec{p}_1, \theta)$$

$$\begin{matrix} x_2 = \cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y_2 = \sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cdot \cos \theta + \cos \alpha \cdot \sin \theta = y_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

- also:

$$\vec{p}_2 = R_{(\theta)} \vec{p}_1 \quad \text{mit} \quad R_{(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



## Rotation um z-Achse

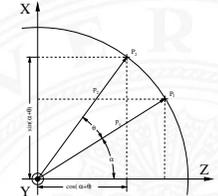
Drehung um die z-Achse um den Winkel  $\phi$ :

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Rotation um y-Achse

Drehung um die y-Achse um den Winkel  $\theta$ :

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{matrix} z_2 = \cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta = z_1 \cos \theta - x_1 \sin \theta \\ x_2 = \sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cdot \cos \theta + \cos \alpha \cdot \sin \theta = x_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta \end{matrix}$$

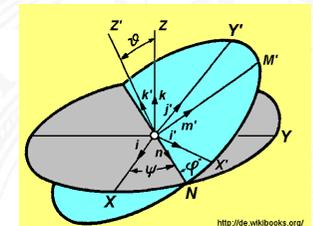
$$\begin{matrix} x_2 = x_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta \\ z_2 = -x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

## Folge von Drehungen

Drehungen beziehen sich auf die neuen, transformierten Achsen: Sequentielle Rechtsmultiplikationen der Transformationsmatrizen nach der Reihenfolge der Drehungen.

Beispiel: Rotation um  $Z X' Z''$ :

1. Eine Drehung  $\psi$  um die z-Achse  $R_{z,\psi}$
2. Eine Drehung  $\theta$  um die neue x-Achse  $R_{x',\theta}$
3. Eine Drehung  $\phi$  um die neue z-Achse  $R_{z'',\phi}$



Anmerkung:

Die Folge der Drehungen lässt sich auch durch Drehungen um die raumfesten (ungedrehten) Achsen, allerdings in umgekehrter Reihenfolge, verwirklichen: 1. Drehung um die Z-Achse um  $\phi$ , 2. Drehung um die X-Achse um  $\theta$  und Drehung um die Z-Achse um  $\psi$ .

## Verknüpfung der Drehmatrizen

$$R_{\psi,\theta,\phi} = R_{z,\psi} R_{x',\theta} R_{z'',\phi}$$

$$= \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\psi C\phi - S\psi C\theta S\phi & -C\psi S\phi - S\psi C\theta C\phi & S\psi S\theta & 0 \\ S\psi C\phi + C\psi C\theta S\phi & -S\psi S\phi + C\psi C\theta C\phi & -C\psi S\theta & 0 \\ S\theta S\phi & S\theta C\phi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$AB \neq BA$$

## Folge von Drehungen, Rechts- und Linksmultiplikation

$${}^K R_B \cdot x^T = v^T$$

$$R \cdot x^T = v^T$$

$$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot x^T = v^T$$

$$R_2 \cdot R_3 \cdot x^T = R_1^{-1} \cdot v^T$$

$$R_3 \cdot x^T = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1} \cdot v^T$$

$$x^T = R_3^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot R_1^{-1} \cdot v^T$$

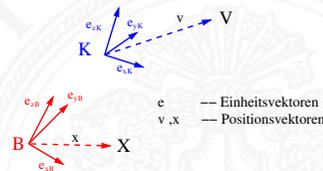
$$x^T = R_3^T \cdot R_2^T \cdot R_1^T \cdot v^T$$

$$x = (R_3^T \cdot R_2^T \cdot R_1^T \cdot v^T)^T$$

$$x = v \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$$

$$x = v \cdot {}^K R_B$$

mit :  ${}^K R_B = {}^K R_{1B} \cdot {}^K R_{2B} \cdot {}^K R_{3B}$   
 kurz :  ${}^K R_B = R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$



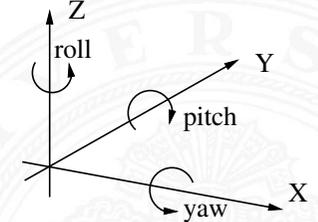
mit :  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$   
 (1)

## Folge von Drehungen (cont.)

Drehungen beziehen sich auf die Hauptachsen des Ursprungskordinatensystems: Sequentielle Linksmultiplikationen der Transformationsmatrizen nach Reihenfolge der Drehungen.

Beispiel: Rotation um X Y Z (RPY):

1. Eine Drehung  $\psi$  um die x-Achse  $R_{x,\psi}$  (yaw)
  2. Eine Drehung  $\theta$  um die y-Achse  $R_{y,\theta}$  (pitch)
  3. Eine Drehung  $\phi$  um die z-Achse  $R_{z,\phi}$  (roll)
- ( $\vec{a}'^T = R_{z(\phi)} \cdot R_{y(\theta)} \cdot R_{x(\psi)} \cdot \vec{a}^T$ )



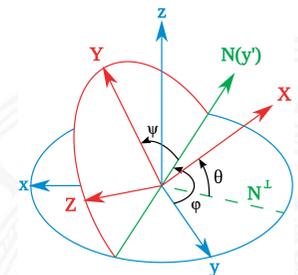
Bezogen auf die jeweils mitrotierten Achsen lässt sich die Folge auch durch sequentielle Rechtsmultiplikationen beschreiben mit:

1. Drehung um die z-Achse um  $\phi$  ( $R_{z,\phi}$ )
  2. Drehung um die transformierte y-Achse um  $\theta$  ( $R_{y',\theta}$ )
  3. Drehung um die abermals transformierte x-Achse um  $\psi$  ( $R_{x'',\psi}$ )
- ( $\vec{a}' = \vec{a} \cdot R_{z(\phi)} \cdot R_{y(\theta)} \cdot R_{x(\alpha)}$ )

## Folge von Drehungen, Beispiel

Rotationsfolge 1 (RPY):

1. Drehung um die x-Achse mit  $\psi = 20^\circ$
2. Drehung um die y-Achse mit  $\theta = 30^\circ$
3. Drehung um die z-Achse mit  $\phi = 50^\circ$



Rotationsfolge 2 (Z Y' X''):

1. Drehung um die z-Achse mit  $\phi = 50^\circ$
2. Drehung um die mitgedrehte y-Achse ( $y'$ ) mit  $\theta = 30^\circ$
3. Drehung um die erneut mitgedrehte x-Achse ( $x''$ ) mit  $\psi = 20^\circ$

## Verknüpfung der Drehmatrizen

$$R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi & 0 \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

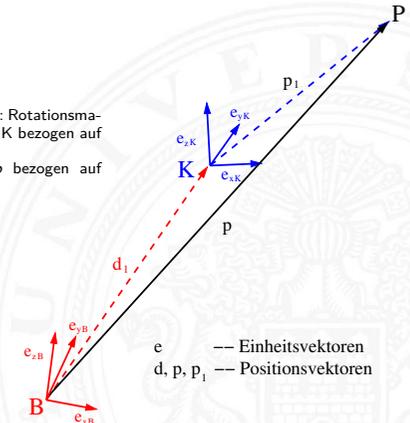
## Beispiel: Homogene Koordinaten

Punkte im Raum können beschrieben werden durch:

- Positionsvektoren
- Rotationsmatrix

$${}^B p = {}^B d_1 + {}^B p_1 \\ = {}^B d_1 + {}^B R_K {}^K p_1$$

Hinweis:  
 ${}^B R_K$  bedeutet: Rotationsmatrix für Frame K bezogen auf Frame B.  
 ${}^K p$ : Vektor  $p$  bezogen auf Frame K.



In homogenen Koordinaten:

$${}^B p_H = \begin{bmatrix} {}^B R_K & {}^B d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^K p_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = {}^B H_K {}^K p_H$$

e --- Einheitsvektoren  
d, p, p<sub>1</sub> --- Positionsvektoren

## Beispiel: Homogene Koordinaten (cont.)

${}^B R_K$  versus  ${}^K R_B$

$${}^B p_1 = {}^K p_1 \cdot {}^K R_B$$

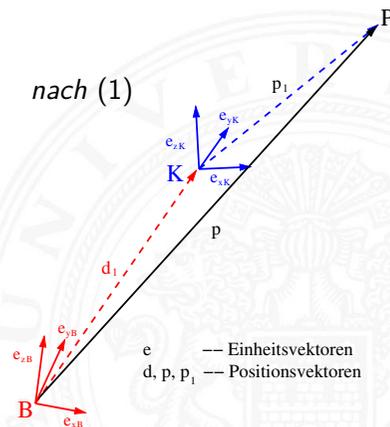
nach (1)

$${}^B R_K \cdot {}^K p_1^T = {}^B p_1^T$$

$$({}^B R_K \cdot {}^K p_1^T)^T = {}^K p_1 \cdot {}^K R_B$$

$${}^K p_1 \cdot {}^B R_K^T = {}^K p_1 \cdot {}^K R_B$$

$$\Rightarrow {}^B R_K^{-1} = {}^K R_B$$



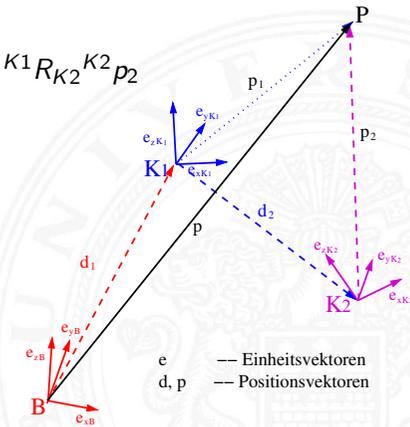
e --- Einheitsvektoren  
d, p, p<sub>1</sub> --- Positionsvektoren

## Beispiel: Homogene Koordinaten (cont.)

$${}^B p = {}^B d_1 + {}^B d_2 + {}^B p_2 \\ = {}^B d_1 + {}^B R_{K1} \cdot {}^{K1} d_2 + {}^B R_{K1} {}^{K1} R_{K2} {}^{K2} p_2$$

In homogenen Koordinaten:

$${}^B p_H = {}^B H_{K1} {}^{K1} H_{K2} {}^{K2} p_{2H}$$



e --- Einheitsvektoren  
d, p --- Positionsvektoren

## Koordinaten-Frames

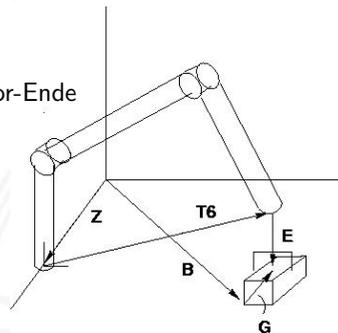
Sie werden über die Elemente der homogenen Transformation als vier Vektoren dargestellt.

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

## Relativtransformationen

Man hat die folgenden Transformationen:

- ▶  $Z$ : Welt  $\rightarrow$  Manipulator-Basis
- ▶  $T_6$ : Manipulator-Basis  $\rightarrow$  Manipulator-Ende
- ▶  $E$ : Manipulator-Ende  $\rightarrow$  Endeffektor
- ▶  $B$ : Welt  $\rightarrow$  Objekt
- ▶  $G$ : Objekt  $\rightarrow$  Endeffektor



## Inverse Transformationen

Die Inverse einer Drehmatrix ist einfach ihre Transponierte:

$$R^{-1} = R^T \text{ und } RR^T = I$$

wobei  $I$  die Identitätsmatrix ist.

Die Inverse von (1) ist:

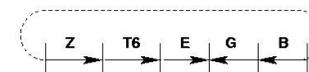
$$H^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{r}_1 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{r}_2 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{r}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  und  $\mathbf{p}$  die vier Spaltenvektoren von (1) sind und  $\cdot$  das Skalarprodukt von Vektoren darstellt.

## Gleichung der Transformation

Es gibt zwei Beschreibungen der Position des Endeffektors, eine in Bezug auf das Objekt und die andere auf den Manipulator. Sie beschreiben die gleiche Sache:

$$ZT_6E = BG$$



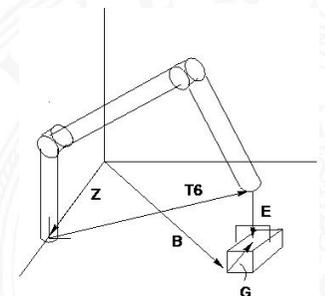
Um die Manipulator-Transformation zu finden:

$$T_6 = Z^{-1}BGE^{-1}$$

Um die Position des Objekts zu bestimmen:

$$B = ZT_6EG^{-1}$$

Dies wird auch als kinematische Kette bezeichnet.



## Zusammenfassung der homogenen Transformationen

- ▶ Eine homogene Transformation beschreibt die Position und Orientierung eines Koordinaten-Frames im Raum.
- ▶ Wenn der Koordinaten-Frame bezüglich eines Festkörpers definiert wird, ist die Position und Orientierung des Festkörpers auch eindeutig spezifiziert.
- ▶ Eine homogene Transformation kann in eine Rotation und in eine Translation zerlegt werden.

## Agenda

### 2. Grundlagen der Robotik

- Grundbegriffe
- Roboterklassifikation
- Koordinatensysteme
- Homogene Transformationen
- Verknüpfung der Drehmatrizen
- Koordinaten-Frames
- Zusammenfassung der homogenen Transformationen
- Roboterkinematik

## Zusammenfassung der homogenen Transformationen

- ▶ Mehrere Translationen und Rotationen können zusammengefasst werden. Es gilt:
  - ▶ Wenn die Rotationen / Translationen bezüglich des aktuellen neu definierten (oder veränderten) Koordinatensystems durchgeführt werden, müssen die entsprechenden neu hinzukommenden Transformationsmatrizen über eine Rechtsmultiplikation verknüpft werden.
  - ▶ Wenn sie alle bezüglich des festen Referenz-Koordinatensystems durchgeführt werden, müssen die zusätzlichen Transformationsmatrizen durch eine Linksmultiplikation verknüpft werden.

## Roboterkinematik

Unter Kinematik eines Roboters versteht man die Transformationsvorschrift, die den Zusammenhang zwischen den Gelenkkordinaten eines Roboters  $\mathbf{q}$  und den Umweltkoordinaten des Endeffektors  $\mathbf{x}$  beschreibt. Sie wird nur durch die Geometrie des Roboters bestimmt.

- ▶ Basisframe
- ▶ Bezug konsekutiver Frames zueinander  
⇒ Bildung einer rekursiven Kette
- ▶ Gelenkkordinate:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & : \text{Gelenk } i \text{ rotatorisch} \\ d_i & : \text{Gelenk } i \text{ translatorisch} \end{cases}$$

- ▶ Ziel: absolute Bestimmung der Position des Endeffektors (Tool Center Point, TCP) im kartesischen Koordinatensystem

## Kinematik-Gleichungen

- ▶ Manipulator: eine Reihe von Gliedern über Gelenke verbundenen
- ▶ jedem Glied einen eigenen Koordinaten-Frame
- ▶ Homogene Matrix  $A$  beschreibt relative Translation und Rotation zwischen zwei aufeinander folgenden Gelenken (Gelenkübergang).
- ▶ Beispiel: Manipulator mit  $n$  Gelenken:
  - ${}^0A_1$ : Position und Orientierung des ersten Gliedes
  - ${}^1A_2$ : Position und Orientierung des 2. Gliedes bezüglich Glied 1
  - ${}^2A_3$ : Position und Orientierung des 3. Gliedes bezüglich Glied 2
  - $\vdots$
  - ${}^{n-1}A_n$ : Position und Orientierung Glied  $n$  bezüglich Glied  $(n-1)$ ;

Das folgende Produkt wird definiert als:

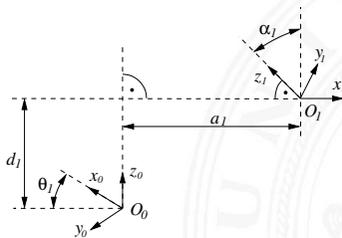
$$T_6 = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{n-2}A_{n-1} {}^{n-1}A_n$$

## Festlegung der Gelenkkordinatensysteme

- ▶ Ziel: Berechnung von  $T_6 = \prod_{i=1}^n A_i$ 
  - ▶  $T_6$  definiert, wie die  $n$  Gelenkübergänge zusammenzufassen sind, um 6 kartesische Freiheitsgrade zu beschreiben.
- ▶ Festlegung eines Koordinatensystems pro Segment  $i = 1..n$ 
  - ▶ Zuordnung KS zu Gelenk grundsätzlich beliebig
- ▶ Ermittlung der Transformation  $A_i$  pro Segment  $i = 1..n$ 
  - ▶ unterschiedliche Parametersätze und Transformationsabfolgen möglich
- ▶ allgemein anerkanntes Schema: Denavit-Hartenberg (D-H) Konvention

## Denavit Hartenberg Konvention

- ▶ Idee: Bestimmung der Transformationsmatrix  $A_i$  mittels vier Gelenkparameter ( $\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i$ ) und zwei Vorbedingungen:
  - DH1: die Achse  $x_i$  verläuft senkrecht zur Achse  $z_{i-1}$
  - DH2: die Achse  $x_i$  schneidet die Achse  $z_{i-1}$

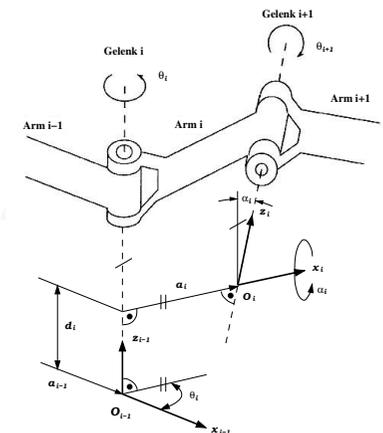


- ▶ Ermittlung der 4 Parameter pro Segment  $i = 1..n$

## Parameter zur Beschreibung der Gelenke

Zwei Parameter zur Beschreibung der Struktur des Gelenkes  $i$ :

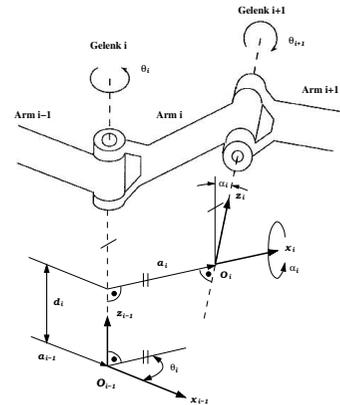
- ▶  $a_i$ : die kürzeste Entfernung zwischen der  $z_{i-1}$ -Achse und der  $z_i$ -Achse
- ▶  $\alpha_i$ : der Drehwinkel um die  $x_i$ -Achse, der die  $z_{i-1}$ -Achse auf die  $z_i$ -Achse ausrichtet



## Parameter zur Beschreibung der Gelenke (cont.)

Zwei Parameter zur Bestimmung der relativen Distanz und Winkel der benachbarten Gelenke:

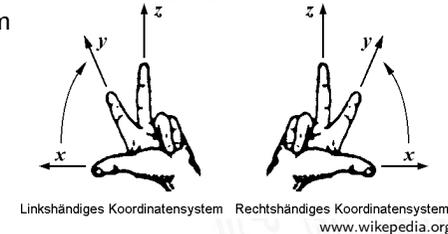
- ▶  $d_i$ : Entfernung Ursprung  $O_{i-1}$  des  $(i-1)$ -ten KS zu Schnittpunkt der  $z_{i-1}$ -Achse mit der  $x_i$ -Achse.
- ▶  $\theta_i$ : der Gelenkwinkel um die  $z_{i-1}$ -Achse von der  $x_{i-1}$ -Achse zur Projektion der  $x_i$ -Achse in die  $x_{i-1}, y_{i-1}$ -Ebene.



## Festlegung der Koordinatensysteme

Für die Festlegung des Koordinatensystems gilt:

- ▶ Die  $z_i$ -Achse wird entlang der Bewegungsachse des  $(i+1)$ -ten Gelenks gelegt.
- ▶ Die  $x_i$ -Achse ist senkrecht zur  $z_{i-1}$ -Achse, schneidet diese und zeigt von ihr weg.
- ▶ Die  $y_i$ -Achse wird so festgelegt, dass ein rechtshändiges Koordinatensystem entsteht.

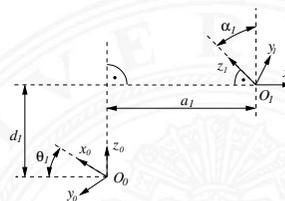


Linkshändiges Koordinatensystem    Rechtshändiges Koordinatensystem  
www.wikipedia.org

## Einige Sonderfälle

**Achtung:** Die Denavit-Hartenberg Notation ist nicht eindeutig!

- ▶  $z_{i-1}$  liegt parallel zu  $z_i$ 
  - ▶ beliebig viele kürzeste Normale
  - ▶ meist Wahl, dass  $d_i=0$
- ▶  $z_{i-1}$  und  $z_i$  schneiden sich
  - ▶ meist Wahl, dass KS $_i$  im Schnittpunkt liegt, dann  $a_i = 0$
- ▶ Lage von KS $_n$  nicht eindeutig, da kein Gelenk  $n+1$  existiert;  $x_n$  muss aber trotzdem auf einer Normalen zu  $z_{n-1}$  liegen; übliche Wahl:  $z_n$  zeigt "aus Hand heraus"



## Vorgehen bei gegebener Struktur

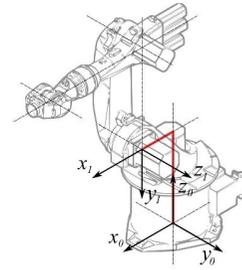
- ▶ Ausgangspunkt: Das Koordinatensystem  $\Sigma_0$  ist das ortsfeste Ausgangskordinatensystem in der Basis des Manipulators
- ▶ Achsen bestimmen und von 1 bis  $n$  durchnummerieren
- ▶ KS $_{i-1}$  auf Dreh- bzw. Schubachse  $i$  positionieren,  $z_{i-1}$  zeigt in Achsrichtung  $i$
- ▶ Normale zw. den Achsen bestimmen;  $x_i$  festlegen (in Richtung der Normalen)
- ▶  $y_i$  bestimmen (Rechtssystem)
- ▶ Denavit-Hartenberg Parameter ablesen
- ▶ Gesamttransformation berechnen

## DV-Transformation zwischen zwei Gelenken

Beispiel: Überführung eines Koordinatensystems  $T_0$  in ein Koordinatensystem  $T_1$

- ▶ Gelenkwinkel: Rotation  $\theta_1$  um die  $z_0$ -Achse, damit die  $x_0$ -Achse parallel zu der  $x_1$ -Achse liegt

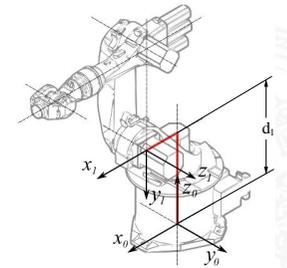
$$R_z(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## DV-Transformation zwischen zwei Gelenken (cont.)

- ▶ Gelenkabstand: Translation  $d_1$  entlang der  $z_0$ -Achse bis zu dem Punkt, wo sich  $z_0$  und  $x_1$  schneiden

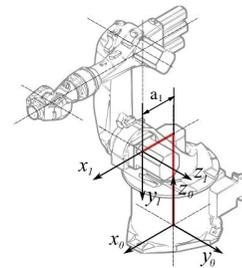
$$T(0, 0, d_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## DV-Transformation zwischen zwei Gelenken (cont.)

- ▶ Armlänge: Translation  $a_1$  entlang der  $x_1$ -Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen

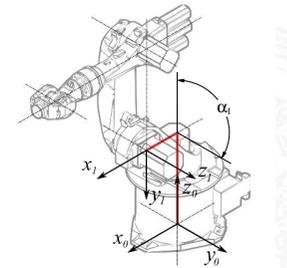
$$T(a_1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## DV-Transformation zwischen zwei Gelenken (cont.)

- ▶ Verwindung: Rotation  $\alpha_1$  um die  $x_1$ -Achse, um die  $z_0$ -Achse in die  $z_1$ -Achse zu überführen

$$R_x(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## DV-Transformation zwischen zwei Gelenken (cont.)

- ▶ Gesamttransformation von  $T_0$  nach  $T_1$ :

$${}^1T_0 = R_z(\theta_1) \cdot T(0, 0, d_1) \cdot T(a_1, 0, 0) \cdot R_x(\alpha_1)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \cos\alpha_1 & \sin\theta_1 \sin\alpha_1 & a_1 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \cos\alpha_1 & -\cos\theta_1 \sin\alpha_1 & a_1 \sin\theta_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Denavit-Hartenberg-Parameter:  $\theta_n, d_n, a_n, \alpha_n$ 
  - ▶  $a_n, \alpha_n$  – konstant, konstruktionsbedingt
  - ▶  $\theta_n, d_n$  – variabel
    - ▶ Rotationsgelenk:  $\theta_n$  variabel,  $d_n$  fix
    - ▶ Translationsgelenk,  $d_n$  variabel,  $\theta_n$  fix

## Bahnplanung

Da  $T_6$  nur die Ziel**position** beschreibt, ist explizite Generierung einer Trajektorie nötig, je nach *constraints* unterschiedlich für:

- ▶ Gelenkwinkelraum
- ▶ kartesischen Raum

Interpolation durch:

- ▶ stückweise Geraden
- ▶ stückweise Polynome
- ▶ B-Splines
- ▶ ...

Diese Aspekte werden wegen der beschränkten Zeit nicht weiter vertieft. Siehe hierzu relevante Veranstaltungen unter:

<http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/lectures/>

## Position

$T_6$  definiert, z. B. bei einem Manipulator mit ausschließlich Rotationsgelenken, wie die  $n$  Gelenkwinkel zu 12 nichtlinearen Formeln zusammenzufassen sind, um 6 kartesische Freiheitsgrade zu beschreiben.

- ▶ Vorwärtskinematik  $K$  definiert als:
  - ▶  $K : \vec{\theta} \in \mathcal{R}^n \rightarrow \vec{x} \in \mathcal{R}^6$
  - ▶ Gelenkwinkel  $\rightarrow$  Position + Orientierung
- ▶ Inverse Kinematik  $K^{-1}$  definiert als:
  - ▶  $K^{-1} : \vec{x} \in \mathcal{R}^6 \rightarrow \vec{\theta} \in \mathcal{R}^n$
  - ▶ Position + Orientierung  $\rightarrow$  Gelenkwinkel
  - ▶ nichttrivial, weil  $K$  i.A. nicht eindeutig invertierbar