64-544
Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

http://tams.informatik.uni-hamburg.de/
lectures/2011ss/vorlesung/GdSR

Jianwei Zhang

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Sommersemester 2011

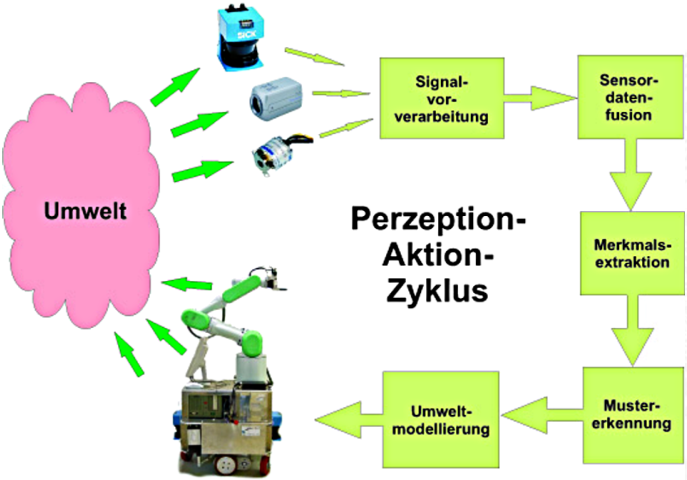
Gliederung

Gliederung

Sensoren in der Robotik

- Der Sensoreinsatz gewinnt bei der Entwicklung autonomer und intelligenter Robotersysteme zunehmend an Bedeutung
- Dabei steht der Perzeption-Aktion-Zyklus im Vordergrund
- Hierbei wird die Umwelt über Sensoren wahrgenommen und adaptiv verändert
- Vor allem bei der interaktiven Zusammenarbeit mit Robotersystemen ist das situierte Verändern von Arbeitsabläufen erforderlich

Perzeption-Aktion-Zyklus



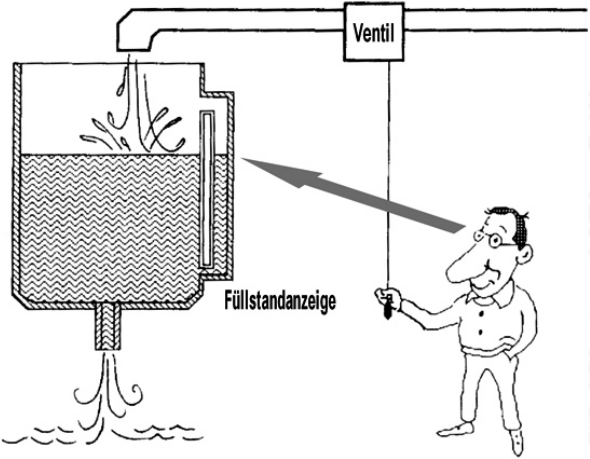
Perzeption-Aktion-Zyklus (cont.)

1. **Datenerfassung:** Die Sensoren erfassen die Stimuli und geben ein analoges oder digitales Signal aus
2. **Signalvorverarbeitung:** Filtern, Normieren, usw.
3. **Sensordatenfusion:** Redundante oder mehrdimensionale Sensordaten werden zusammengefasst, um robustere Messdaten zu erhalten
4. **Merkmalsextraktion:** Für die technische Realisierung biologischer/menschlicher Wahrnehmung werden Merkmale berechnet, die die Perzeption mathematisch beschreiben

Perzeption-Aktion-Zyklus (cont.)

5. **Mustererkennung:** Auf den extrahierten Merkmalen werden Muster gesucht (Klassifikation)
6. **Umweltmodellierung:** Mit den Mustern wird die Umgebung und Umwelt des Roboters modelliert
7. **Manipulation:** Auf Basis des Modells werden Aktionen durchgeführt, mit denen der Roboter die Umwelt verändert

Ein einfaches Beispiel



Was ist ein Sensor?

Der Sensor besteht aus zwei Teilen:

- der Füllstandanzeige und
- dem menschlichen Auge,

das ein Signal an das Gehirn sendet

Definition

Ein Sensor ist eine Einheit, die ein Signal oder Stimulus

- empfängt
- und darauf reagiert

Natürliche und physikalische Sensoren

Natürliche Sensoren:

- Reaktion ist elektrochemisches Signal auf Nervenbahnen
- **Beispiele:** Hören, Sehen, Tasten, ...

Physikalische Sensoren:

Definition

Ein physikalischer Sensor ist eine Einheit, die ein Signal oder Stimulus

- empfängt
- und darauf mit einem (*elektrischen*) *Signal* reagiert

Eingangssignal

- Ein Sensor wandelt ein (generell) nicht-elektrisches Signal in ein elektrisches um
- Dieses Signal wird als Stimulus bezeichnet

Definition

Ein Stimulus ist eine

- Größe,
- Eigenschaft oder
- Beschaffenheit,

die wahrgenommen und in ein elektrisches Signal umgewandelt wird

Ausgangssignal

- Das Ausgangssignal eines elektrischen Sensors kann sein:
  - Spannung,
  - Strom oder
  - Ladung

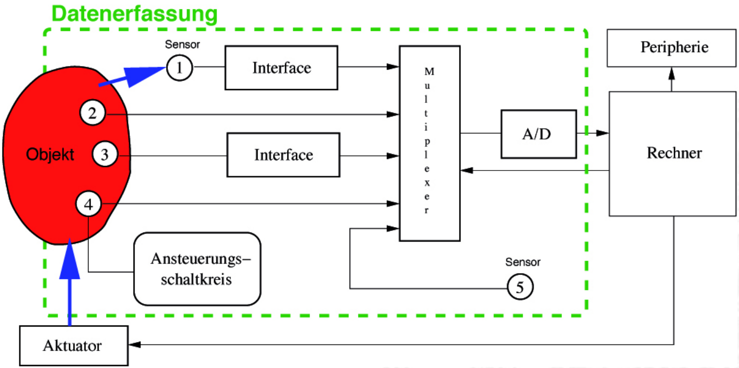
  sein
- Es kann weiter unterscheidbar sein durch:
  - Amplitude,
  - Frequenz oder
  - Phase

Sensortypen

- extrinsisch:
  Ermitteln von Informationen über die *Systemumgebung*
- intrinsisch:
  Ermitteln von Informationen über den *internen Systemzustand*

- aktiv:
  Variieren *angelegtes elektrisches Signal* bei Veränderung des Stimulus
- passiv:
  Erzeugen *direkt* ein elektrisches Signal bei Veränderung des Stimulus

Def. von aktiv/passiv nach Bosch, wie in der Fahrzeugelektronik üblich; aber Achtung: die traditionelle Def. lautet entgegengesetzt.



Sensortypen:	
1.: extrinsisch, passiv	2. und 3.: intrinsisch, passiv
4.: intrinsisch, aktiv	5.: intrinsisch (in der Datenerfassung), passiv

Multiplexer (MUX)

- Schalter bzw. Weiche
- verbindet Signale einzeln mit dem A/D-Wandler
- Vorteil: nur ein A/D-Wandler notwendig
- Rechner steuert den MUX
  (Auswahl des durchzuschaltenden Eingangs)

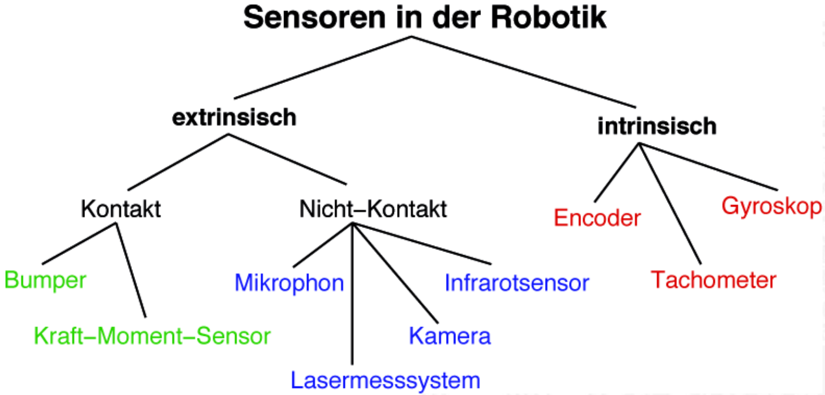
Digitale Sensorausgaben können auch direkt an den Rechner gehen

Sensorklassifikation

Klassifikation von Sensoren anhand von:

- Art des Stimulus
- Eigenschaften, Spezifikation und Parameter,
- Art wie Stimulus detektiert wird
- Art der Umwandlung von Stimulus in Ausgangssignal
- Material des Sensors
- Einsatzgebiet

Beispiel-Klassifikation



Messen mit Sensoren

- wichtiges wissenschaftliches Kriterium: *Reproduzierbarkeit*
- wissenschaftliche Aussagen müssen vergleichbar sein
- Aussagen müssen *quantitativ* sein, sie müssen auf Messungen beruhen
- Messergebnis besteht aus:
  - Maßeinheit
  - Zahlenwert
- zusätzlich: Angabe der Genauigkeit der Messung

Messfehler

Es gibt keinen Messprozess, der ein fehlerloses, absolut genaues Ergebnis liefert!

Messabweichung (Messfehler)

Systematische Abweichung („systematischer Fehler"):

- Abweichung wird durch den Sensor verursacht
- z.B.: falsche Eichung/Kalibrierung, dauernd vorhandene Störungen wie Reibung
- nur durch sorgfältiges Untersuchen der Fehlerquelle zu beseitigen

Zufällige Abweichung („zufälliger oder statistischer Fehler"):

- Abweichung wird durch unvermeidbare, regellose Störungen (Rauschen) verursacht
- bei wiederholter Messung weichen Einzelergebnisse voneinander ab
- Einzelergebnisse schwanken um einen Mittelwert

Fehlerangabe

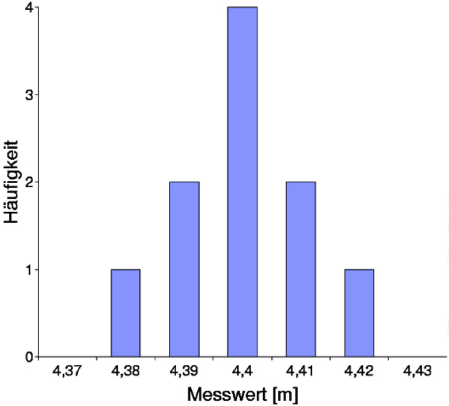
- Eine Messung ist stets mit Unsicherheit behaftet
- **Beispiel:** Entfernungsmessung
  - Abstand zu einem Objekt wird mehrmals gemessen

Einzelergebnisse der Messung:				
$4,40\ m$	$4,40\ m$	$4,38\ m$	$4,41\ m$	$4,42\ m$
$4,39\ m$	$4,40\ m$	$4,39\ m$	$4,40\ m$	$4,41\ m$

  - Einzelergebnisse der Messung sind unterschiedlich

Histogramm

Die Messung lässt sich in einem Histogramm darstellen:



Mittelwert einer Stichprobe

Den Mittelwert $\bar{x}$ der Einzelmessungen x_i erhält man durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Der Mittelwert der Stichprobe wird auch als empirischer Mittelwert oder bester Schätzwert für den wahren Wert μ bezeichnet

Anmerkung: μ ist der *Mittel-* oder *Erwartungswert* der Grundgesamtheit (häufig auch „wahrer“ Wert x_w der Messgröße X genannt: $E(X) = \mu = x_w$). Es wird angenommen, dass die Messgröße X eine (normalverteilte) Zufallsvariable ist. Die unendliche Grundgesamtheit ist die Menge aller möglichen Messwerte.

Absolute und relative Messabweichung

Die Unsicherheit wird in zwei Formen angegeben:

- Absolute Messabweichung („Absoluter Fehler"):
  Der absolute Fehler Δx_i einer Einzelmessung x_i ist gleich der Abweichung vom Mittelwert $\bar{x}$ aller N Messungen $\{x_n | n \in \{1 \dots N\}\}$

- Relative Messabweichung („Relativer Fehler"):
  Der relative Fehler ist das Verhältnis von absolutem Fehler zum Messwert $\frac{\Delta x_i}{x_i}$

Varianz einer Messreihe

Die *Streuung* der einzelnen Messwerte x_i um den empirischen Mittelwert $\bar{x}$ lässt sich durch die Varianz der Messreihe charakterisieren:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i)^2
\end{aligned}
$$

Anmerkung: In der Berechung wurde der Faktor $N-1$ und nicht N benutzt, da *a)*. bei nur einer Messung $x_i = \bar{x}$ und s^2 verschwinden würde, und *b)*. die Schätzung der Varianz der Stichprobe sonst kleiner als die der Grundgesamtheit wäre (Information für Schätzung des Mittelwertes auch aus der Stichprobe, was zu einer Reduktion der Freiheitsgrade führt; deshalb Korrekturfaktor $\frac{N}{N-1}$).

Standardabweichung einer Messreihe

Die positive Wurzel der Varianz ist die Standardabweichung bzw. Standardabweichung der Messreihe:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Die Standardabweichung wird auch als durchschnittlicher bzw. mittlerer Fehler der Einzelmessung bezeichnet

Standardabweichung des Mittelwertes

Satz

Sei $\bar{x}$ arithmetisches Mittel einer Stichprobe, dann gelten bei hinreichend großem $n \quad (n \geq 30)$ die arithmetischen Mittel als annähernd normalverteilt und es gilt:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x$$

mit $\mu_{\bar{x}}$ = Erwartungswert der Mittelwerte
μ_x = Erwartungswert der Grundgesamtheit

Für die Varianz $(\sigma^2 = E(x-\mu)^2)$ der Mittelwerte gilt:

$$\sigma_{\bar{x}}{}^2 = \frac{\sigma_x{}^2}{n}$$

mit $\sigma_{\bar{x}}{}^2$ = Varianz der Mittelwerte
$\sigma_x{}^2$ = Varianz der Grundgesamtheit
n = Umfang der Stichprobe

Ergebnis einer Messung

Als Standardabweichung des Mittelwertes (auch: Fehler des Mittelwertes) erhält man somit:

$$s_{\bar{x}} \quad = \quad \frac{s}{\sqrt{N}}$$

$s_{\bar{x}}$ beschreibt die Streuung der aus verschiedenen Messreihen erhaltenen Mittelwerte $\bar{x}$ um den „wahren“ Wert (Mittelwert) μ

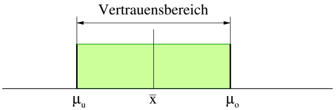
Definition

Als Ergebnis einer Messung erhält man:

$$x = (\bar{x} \pm s_{\bar{x}})\,[Einheit]$$

Vertrauensgrenze

- die Vertrauensgrenze von $\pm s_{\bar{x}}$ besagt bei großem N ($>> 30$): ca. 68 % der Messwerte liegen im angegebenen Intervall
- wird eine Sicherheit von 95 % verlangt, ist das Intervall auf $\pm 2 \cdot s_{\bar{x}}$ zu vergrößern
- bei 99 % auf etwa $\pm 3 \cdot s_{\bar{x}}$



$$\mu_u = \bar{x} - t\frac{s_{\bar{x}}}{\sqrt{n}} \qquad \mu_0 = \bar{x} + t\frac{s_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$$

t – Faktor gemäß Student-Verteilung

Vertrauensniveau (1-α)	68,3%	95%	99,73%
n=2	1,84	12,7	235,8
n=3	1,32	4,3	19,21
n=4	1,20	3,18	9,22
n=5	1,15	2,78	6,62
n=6	1,11	2,57	5,51
n=10	1,06	2,26	4,09
n=20	1,03	2,09	3,45
n=50	1,01	2,01	3,16
n→∞	1,00	1,96	3,00

Fehlerfortpflanzung

- wird eine abgeleitete Größe aus mehreren Messgrößen berechnet, so ist ebenfalls eine Messunsicherheit anzugeben
- ist die zu berechnende Größe

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

und $\Delta\bar{x}_i$ die Messunsicherheit (Maximalfehler) der einzelnen Messgrößen, so ist die Messunsicherheit $\Delta\bar{z}$ der zu berechnenden Größe

$$\Delta\bar{z} = \left|\frac{\delta f}{\delta x_1}\right| \cdot \Delta\bar{x}_1 \; + \; \ldots \; + \; \left|\frac{\delta f}{\delta x_n}\right| \cdot \Delta\bar{x}_n$$

Fehlerfortpflanzung (cont.)

- Die partiellen Ableitungen stellen Gewichtsfaktoren für die Fortpflanzung der einzelnen Fehler dar
- Gewichtsfaktoren sollten grundsätzlich vor der Messung berechnet werden
- Nur so kann erkannt werden, welche Fehler sich besonders stark auf das Endergebnis auswirken
- Entsprechende Messwerte müssen besonders genau ermittelt werden
- Das Messergebnis einer indirekt ermittelten Messgröße lautet dann:

$$z = \bar{z} \pm \Delta\bar{z}$$

Fehlerfortpflanzung (cont.)

- **zwei Faustregeln:**
  - Bei *Addition* und *Subtraktion* addieren sich die *absoluten Fehler*
  - Bei *Multiplikation* und *Division* addieren sich die *relativen Fehler*
- die Differenz zweier nahezu gleich großer Größen erhält einen großen *relativen Fehler* $\Rightarrow$ besser: Differenz direkt messen
- Quadrierung verdoppelt, Quadratwurzel ziehen halbiert den *relativen Fehler*

Gaußverteilung

- Eine diskrete Häufigkeitsverteilung einer Messreihe geht für $N \to \infty$ in eine kontinuierliche Verteilung über
- Die Messwerte einer physikalisch-technischen Messgröße X sind in den *meisten* Fällen *annähernd normalverteilt*
- $N \to \infty$: $\bar{x} \to \mu$ und $s \to \sigma$

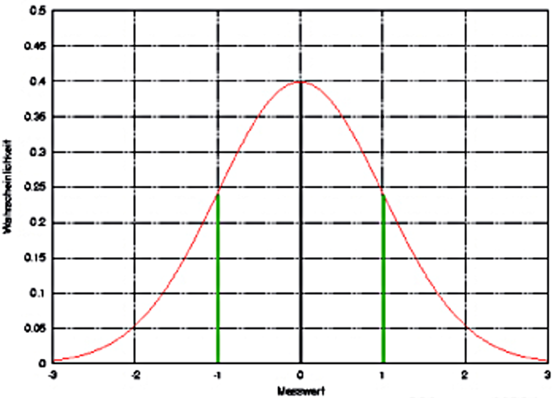
Gaußverteilung (cont.)

Definition

Normierte Dichtefunktion (Gaußsche Normalverteilung)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Gaußverteilung (cont.)



Lineare Regression

- **Häufig:** Messen eines Zusammenhangs zwischen zwei Größen x und y
- **Beispiel:** Spannung und Strom an einem Widerstand
- **Besonders leicht:** linearer Zusammenhang von x und y

$$y = m \cdot x + b$$

- Koeffizienten werden durch lineare Regression bestimmt
- Um den statistischen Fehler zu reduzieren, wird eine Messreihe mit n Messwertpaaren aufgenommen

Lineare Regression (cont.)

Regressionsgerade:

$\hat{y}_i = mx_i + b$

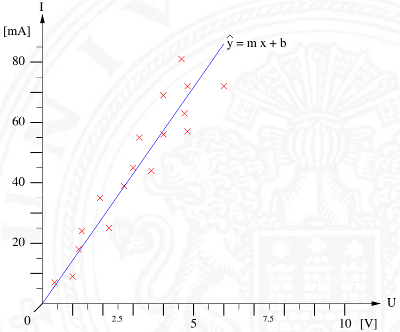
Randbedingungen:

- i $f(m,b) = \sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{y}_i = 0$
- ii $g(m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow min$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - mx_i - b = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0$$
$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - m\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$b = \bar{y} - m\bar{x}$$

$$g(m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2 \rightarrow min$$

x_i, y_i – Messwerte
$\hat{x}_i, \hat{y}_i$ – approx. Werte
$\bar{x}, \bar{y}$ – arith. Mittelwerte



Lineare Regression (cont.)

$$g(m) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - \bar{y} + m\bar{x})^2 \rightarrow min$$
$$g(m) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y} - m(x_i - \bar{x}))^2 \rightarrow min$$

$$g'(m) = \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y} - m(x_i - \bar{x})) = 0$$
$$0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - m\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- Die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden berechnen sich nach:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$$

Korrelationskoeffizient

- Häufig wird der empirische Korrelationskoeffizient r_{xy} angegeben:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

- Je näher r_{xy} an 1 liegt, um so stärker ist eine lineare Abhängigkeit gegeben

Regressionsparabel

Liegen die Messpunkte *nahezu* auf einer Parabel wählt man einen quadratischen Lösungsansatz

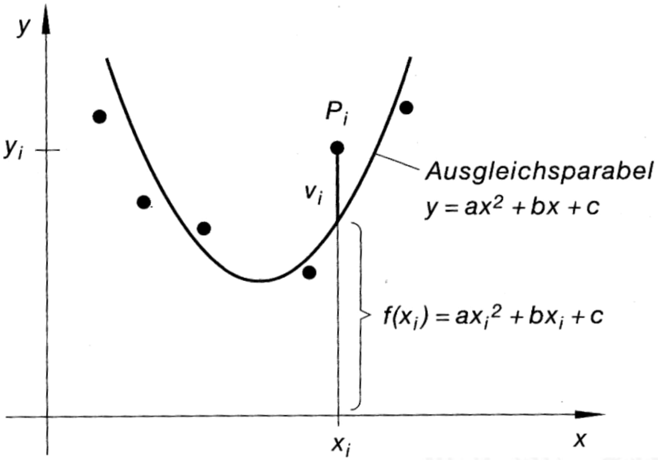
Regressions- oder Ausgleichsparabel

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der vertikale Abstand v_i des i-ten Messpunktes von dieser Parabel beträgt:

$$v_i = y_i - f(x_i) = y_i - ax_i^2 - bx_i - c$$

Regressionsparabel (cont.)



Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate

- Minimieren der Abstandsquadrate aller Messpunkte

$$S(a;b;c) = \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

$$S(a;b;c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

- Eliminieren der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)(-x_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)(-1) = 0$$

Regressionsparabel

- Durch Auflösen der Summen und Ordnen erhält man folgende drei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right) \cdot a + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) \cdot b + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) \cdot c &= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) \cdot a + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) \cdot b + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \cdot c &= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) \cdot a + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \cdot b + n \cdot c &= \sum_{i=0}^{n} y_i
\end{aligned}
$$

Regressionsparabel (cont.)

- Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich mit Hilfe der Cramerschen Regel oder durch den Gaußschen Algorithmus lösen
- Für eine Regressionsparabel müssen mindestens vier Messpunkte vorliegen ($n \geq 4$)

- Beispiel zur Anwendung der Regressionsparabel:
  - Ermittlung des Zusammenhangs zwischen *Bremsweg* s (in m) und *Geschwindigkeit* v (in km/h)
  - siehe: L. Papula: *Mathematik für Ingenieuere und Naturwissenschaftler (Band 3)*, Seite 712–714

Nichtlineare Regression

- Viele nichtlineare Lösungsansätze lassen sich durch eine Transformation auf den linearen Ansatz zurückführen
- Beispiel: Exponentialfunktion

$$y = a \cdot e^{bx}$$

- Durch *Logarithmieren* erhält man:

$$\ln y = \ln(a \cdot e^{bx}) = \ln a + \ln(e^{bx}) = \ln a + bx$$

Nichtlineare Regression (cont.)

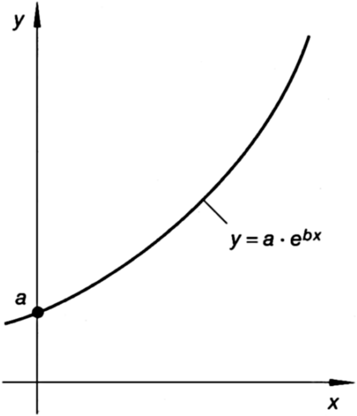
- Einführen einer *Transformation*

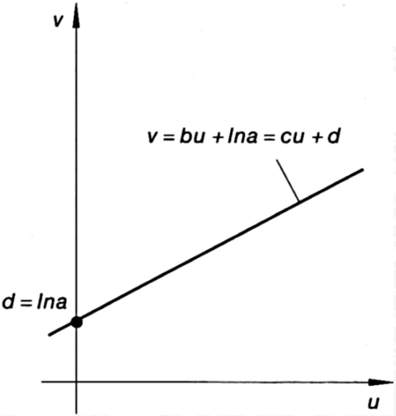
$$u = x, \quad v = \ln y \qquad \text{Zusätzlich:} \quad c = b, \quad d = \ln a$$

Transformation: *Exponentialfunktion in lineare Funktion*

$$y = a \cdot e^{bx} \quad \xrightarrow{\ln} \quad \ln y = bx + \ln a \quad \xrightarrow[v=\ln y]{u=x} \quad v = cu + d$$

Nichtlineare Regression (cont.)





Nichtlineare Regression (cont.)

- Bei der Transformation gehen die Messwerte $(x_i; y_i)$ in neue Wertepaare $(u_i; v_i) = (x_i; \ln y_i)$ über
- Auf den neuen Werten wird die Regression ausgeführt
- Man erhält die „Hilfsparameter" c und d

Durch Rücktransformation erhält man a und b

$$\ln a = d \Rightarrow a = e^d \qquad \text{und} \qquad b = c$$

Nichtlineare Regression (cont.)

Ansatz	**Transformation** $u =$	$v =$	**transformierter Ansatz** (linear)	**Rücktransformation**
$y = a \cdot x^b$	$\ln x$	$\ln x$	$v = cu + d$	$a = e^d, \quad b = c$
$y = a \cdot e^{bx}$	x	$\ln x$	$v = cu + d$	$a = e^d, \quad b = c$
$y = \frac{a}{x} + b$	$1/x$	y	$v = cu + d$	$a = c, \quad b = d$
$y = \frac{a}{b+x}$	x	$1/y$	$v = cu + d$	$a = \frac{1}{c}, \quad b = \frac{d}{c}$
$y = \frac{ax}{b+x}$	$1/x$	$1/y$	$v = cu + d$	$a = \frac{1}{d}, \quad b = \frac{c}{d}$

Nichtlineare Regression (cont.)

- Nach Linearisierung stets lineare Regression mit transformierten Messwerten
- Rechentechnisch einfach und daher beliebt, führt aber aufgrund der unsicheren Eingangswerte über die linearisiert wird, nicht zu den tatsächlichen Parametern a, b, ...
- Exaktere Bestimmung nur über Minimierung der eigentlichen Zielfunktion

$$S(a; b; \dots) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

- Exakte Parameter meist nur durch erheblichem numerischen Rechenaufwand bestimmbar

Eigenschaften von Sensoren

- Ein Eingangssignal muss eventuell mehrmals konvertiert werden, bis der Sensor ein elektrisches Ausgangssignal ausgibt

Beispiel: Druck auf Glasfaser-Sensor

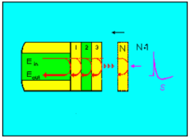
$\Rightarrow$ Dehnung

$\Rightarrow$ Änderung des Brechungsindex

$\Rightarrow$ Änderung der optischen Übertragung

$\Rightarrow$ Messung des Photonenflusses

$\Rightarrow$ Umwandlung in Strom



Faseroptischer Sensor

- In diesem Kapitel wird ein Sensor zunächst als **„Black Box“** betrachtet

Übertragungsfunktion

- Es interessiert im Folgenden nur die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal
- $\Rightarrow$ der Zusammenhang zwischen Stimulus und Ausgangsgröße
- Jeder Sensor besitzt eine ideale bzw. theoretische Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal

Definition

Die ideale Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal eines Sensors wird durch die Übertragungsfunktion $S = f(s)$ beschrieben (engl.: *transfer function*)

Übertragungsfunktion (cont.)

- Das Ausgangssignal S repräsentiert den wahren Wert des Eingangssignals s
- Dies gilt im Falle von idealem Design, Material und idealer Fabrikation
- In der Regel beeinflussen
  - Fertigungsungenauigkeiten,
  - Materialfehler,
  - Umgebungseinflüsse,
  - Abnutzung,
  - etc.

  die Beziehung zwischen Stimulus und Ausgangssignal
- Die wirkliche Beziehung wird als → reale Übertragungsfunktion bezeichnet

Übertragungsfunktion (cont.)

- Meistens ist die Beziehung zwischen Stimulus und Ausgangssignal
  - **eindimensional** und
  - **linear**

Lineare Übertragungsfunktion

$$S = a + b \cdot s$$

- a ist das Ausgangssignal bei einem Eingangssignal von $s = 0$
- b ist die Steigung
- b wird in diesem Zusammenhang oft als Sensitivität bezeichnet

Übertragungsfunktion (cont.)

Weitere wichtige Übertragungsfunktionen

- Logarithmische Übertragungsfunktion:

$$S = a + k \cdot \ln s$$

k ist eine Konstante

- Exponentielle Übertragungsfunktion:

$$S = a \cdot e^{ks}$$

- beliebige Polynome höherer Ordnung

Sensitivität

Definition

Für nicht-lineare Übertragungsfunktionen ist die Sensitivität für jeden Eingangswert s_i wie folgt definiert:

$$b = \frac{dS(s_i)}{ds}$$

Approximation einer Übertragungsfunktion

- Einige nicht-lineare Übertragungsfunktionen sind linear in einem eingeschränkten Bereich
- Nicht-lineare Übertragungsfunktionen können durch mehrere lineare Funktionen approximiert werden
- Die Differenz zwischen wahrem und linear approximiertem Ausgangssignal sollte unter einem zu spezifizierenden Limit liegen

Mehrdimensionale Übertragungsfunktionen

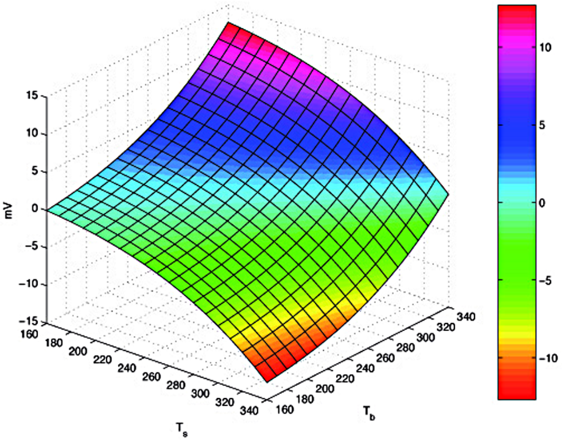
- Übertragungsfunktion kann von mehr als einem Stimulus abhängen
- **Beispiel:** Infrarot-Wärmestrahlungssensor

$$U = G(T_b^4 - T_s^4) \qquad (Stefan - Boltzmann - Gesetz)$$

  - G – Konstante
  - T_b – absolute Temperatur des gemessenen Objektes
  - T_s – absolute Temperatur der Sensoroberfläche
  - U – Ausgangsspannung
  - Sensitivität in Bezug auf die Temperatur des gemessenen Objektes:

$$b = \frac{\partial U}{\partial T_b} = 4GT_b^3$$

Mehrdimensionale Übertragungsfunktionen (cont.)



Messbereich

Definition

Der dynamische Bereich eines Stimulus, der von einem Sensor erfasst wird, wird Messbereich (engl. *Span* oder *Full Scale Input*) genannt

- beziffert den kleinsten und höchsten für einen Sensor zulässigen Stimuluswert
- größere Stimuli können den Sensor beschädigen

Messbereich (cont.)

- Der Messbereich kann als Verhältnis vom maximalen zum minimalen Eingangswert angegeben
- Bei großen dynamischen und nicht-linearen Eingangssignalen wird er in *Dezibel* angegeben
  - Dezibel ist ein logarithmisches Maß für ein Verhältnis G von Leistung (P), Strom (I) oder Spannung (U):

$$G[dB] = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{U_2 U_2/R}{U_1 U_1/R} = 10 \log \frac{{U_2}^2}{{U_1}^2} = 20 \log \frac{U_2}{U_1}$$

  - **Beispiel:** Verstärkung eines Messverstärkers
    in: $1\,mV$; out: $5\,V$ $\rightarrow$ $G = 20 \cdot \log \left[\frac{5}{0.001}\right] = 74\,dB$

Ausgabebereich

Definition

Der Ausgabebereich (engl. *Full Scale Output*) eines Sensors ist das Intervall zwischen dem Ausgangssignal bei kleinstem und größtem angelegten Stimulus

Genauigkeit

- Eine wichtige Eigenschaft eines Sensors ist die Genauigkeit
- *eigentlich:* Ungenauigkeit
- Die Genauigkeit beschreibt die maximale Abweichung zwischen den idealen und den vom Sensor ausgegebenen Werten
- Wie bei jeder Messung spricht man von *systematischen* und *zufälligen* Fehlern eines Sensors

$\Rightarrow$ siehe Abschnitte zu „Messfehler“ und „Fehlerrechnung“

Reale Übertragungsfunktion

- Im Vergleich zur idealen Übertragungsfunktion sind reale Sensoren immer ungenau
- Die Übertragungsfunktion eines realen Sensors heißt daher: reale Übertragungsfunktion

- **Problem:** Sie ist im Gegensatz zu idealen Übertragungsfunktionen meistens weder linear und noch monoton
- **Gründe:** Unterschiede im Material und in der Herstellung, Fehler im Design, Toleranzen in der Herstellung, ...
- **Trotzdem:** Jeder Sensor sollte innerhalb der angegebenen Genauigkeit arbeiten

Reale Übertragungsfunktion (cont.)

- Erlaubte Abweichung von der idealen Übertragungsfunktion: $\pm\Delta$
- Abweichung zwischen idealer und realer Übertragungsfunktion: $\pm\delta$

$$\delta \leq \Delta$$

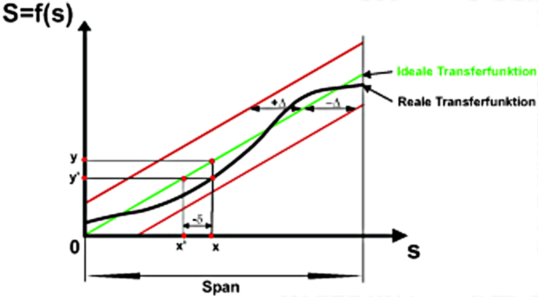
Beispiel: Stimulus x

- ideale Übertragungsfunktion: $y = f_{ideal}(x)$
- reale Übertragungsfunktion: $y' = f_{real}(x)$

Reale Übertragungsfunktion (cont.)

Achtung:

Nimmt man die ideale Übertragungsfunktion, um vom Ergebnis y' auf den Stimulus abzubilden erhält man x' und $\delta = x - x'$



Kalibrierungsfehler

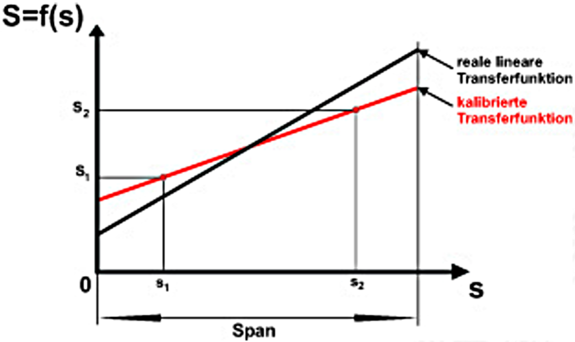
- Firmen *kalibrieren* neue Sensoren nach der Herstellung
- Es ergibt sich ein systematischer Fehler:
  Der *Kalibrierungsfehler*
  - Die Ausgabe des Sensors wird für jeden Stimulus um eine Konstante (additiv oder multiplikativ) verschoben
  - Dieser Fehler ist nicht unbedingt gleichmäßig über den Eingabebereich verteilt

Beispiel: Einfache Kalibrierung

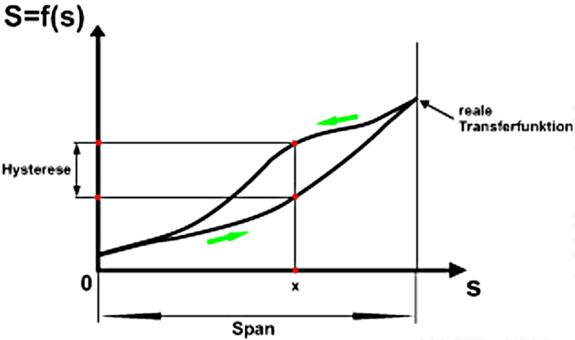
- Ein Sensor hat eine lineare Übertragungsfunktion
- Für jeden hergestellten Sensor kann die Steigung aus Materialgründen unterschiedlich sein

- Der Hersteller bestimmt daher die Steigung für jeden Sensor:
  - Es werden zwei Stimuli s_1 und s_2 angelegt
  - Der Sensor antwortet mit den zugehörigen Signalen S_1 und S_2
  - Die Steigung für diesen Sensor kann bestimmt werden
  - **Problem:** Die Steigung wird aufgrund von Messfehlern nicht mit der realen übereinstimmen

Beispiel: Einfache Kalibrierung (cont.)



Hysterese



Hysteresefehler

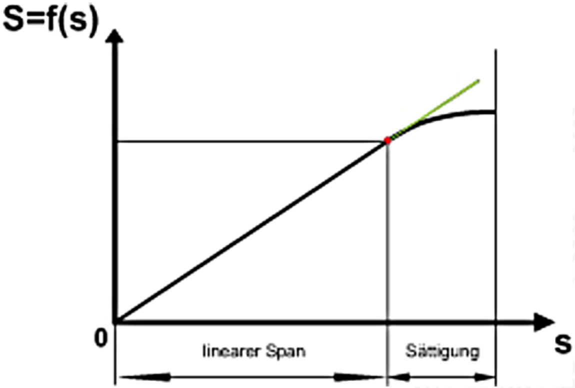
Definition

Ein Hysteresefehler ist die Abweichung des Ausgangssignals eines Sensors für einen bestimmten Stimuluswert, je nachdem, aus welcher Richtung der Stimulus sich diesem Wert nähert

Sättigung

- Fast jeder Sensor hat Arbeitsbereichsgrenzen
- Viele Sensoren haben eine lineare Übertragungsfunktion, ...
- **aber:** Ab einem bestimmten Stimuluswert wird nicht mehr die gewünschten Ausgabe erzeugt
- Man spricht dann von Sättigung

Sättigung (cont.)

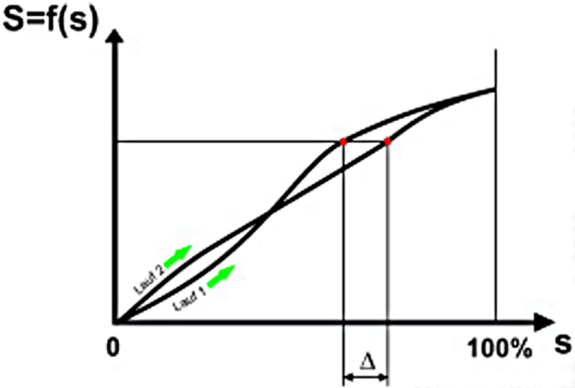


Wiederholgenauigkeit

- Ein Sensor kann bei gleichen Bedingungen unterschiedliche Ausgabewerte produzieren
- Dieser Fehler entspricht der Wiederholgenauigkeit
- Für zwei Kalibrierungszyklen normalerweise:
  Maximale Distanz Δ *zweier Stimuli mit gleichem Ausgangssignal*
- Die Wiederholgenauigkeit wird anteilig zum Messbereich angegeben:

$$\delta_r = \frac{\Delta}{Span} \cdot 100\%$$

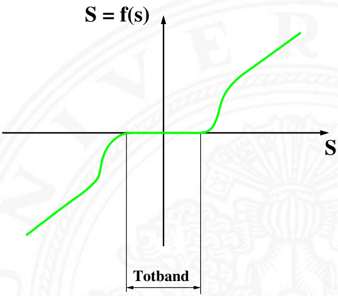
Wiederholgenauigkeit (cont.)



Totband

Definition

Ein Sensor hat ein Totband, wenn er in einem zusammenhängenden Bereich des Eingangssignals mit dem gleichen Ausgangssignal (oft 0) reagiert



Auflösung

Definition

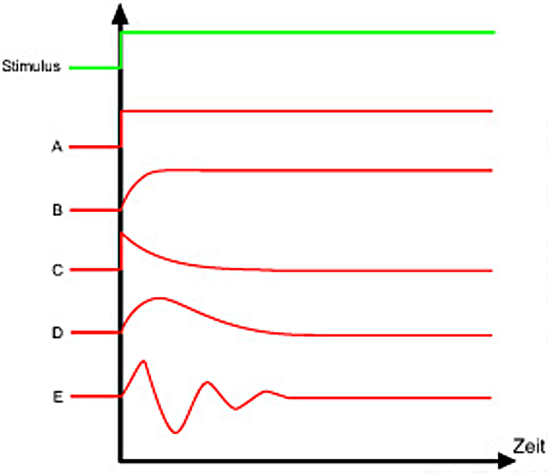
Die Auflösung beschreibt den kleinsten Änderungsschritt des Stimulus, der vom Sensor erfasst wird

- Beispiele: Potentiometer, Winkel bei Lasermesssystemen, ...
- Die Auflösung kann sich über den gesamten Eingangsbereich ändern
- Die Auflösung digitaler Ausgabeformate ist durch die Anzahl der Bits im Ausgabewort definiert (Audio: 8bit/16bit/20bit/24bit)
- Sind die Schritte nicht messbar, hat der Sensor eine *kontinuierliche* bzw. *infinitesimale* Auflösung

Dynamische Eigenschaften

- Für statische Eingangssignale beschreiben die bisher genannten Eigenschaften einen Sensor vollständig
- Wenn das Eingangssignal variiert, gilt dies nicht mehr
- **Grund:** Der Sensor reagiert nicht immer direkt auf den Stimulus
- Ein Sensor gibt daher nicht immer gleichzeitig zum Stimulus den zugehörigen Ausgabewert aus
- Dies nennt man die dynamischen Eigenschaften eines Sensors
- Der entstehende Fehler heißt dynamischer Fehler

Antwortverhalten

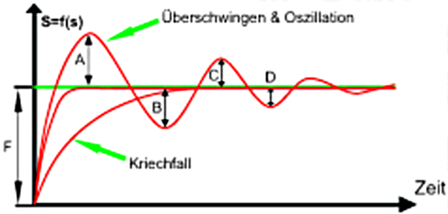


Dämpfung & Dämpfungsfaktor

Für den oszillierenden Fall kann ein Dämpfungsfaktor bestimmt werden:

Definition

$$Dämpfungsfaktor = \frac{F}{A} = \frac{A}{B} = \frac{B}{C} = usw.$$



Umwelteinflüsse

- minimal und maximal zulässige Umgebungstemperatur
- minimal und maximal zulässige Luftfeuchtigkeit
- Kurz- und Langzeitstabilität (Drift)
  Hilfe bei Langzeitdrift: Pre-Aging erhöht Stabilität
- statische und dynamische Änderungen von elektromagnetischen Feldern, Gravitationskräften, Vibrationen, Strahlung etc.
- Selbsterhitzung z.B. durch Stromfluss

Weitere Sensoreigenschaften

- Verlässlichkeit
  z.B. durch Angabe der *mean-time-between-failure* (MTBF)

- besondere Eigenschaften für das Einsatzgebiet:
  - Design
  - Gewicht
  - Maße
  - Preis
  - ...

Literaturliste

[Fra04] Kap. 2 In: Jacob Fraden:
Handbook of modern sensors: physics, design, and applications.
3.
Springer-Verlag New York, Inc., 2004, S. 1–32

[Pap01] Kap. IV In: Lothar Papula:
Mathematik für Ingeneure und Naturwissenschaftler (Band 3): Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung.
4.
Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Mai 2001

Literaturliste (cont.)

[SK94] Kap. 1 In: Herbert A. Stuart, Gerhard Klages:
Kurzes Lehrbuch der Physik.
14.
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1994

[SN04] Kap. 4.1 In: Roland Siegwart, Illah R. Nourbakhsh:
Introduction to Autonomous Mobile Robots.
MIT Press Cambridge, Massachusetts, 2004, S. 89–98