# Einführung in die Robotik

**Jianwei Zhang**
zhang@informatik.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Department Informatik
**Technische Aspekte Multimodaler Systeme**

31. Mai 2011





## Gliederung

# Gliederung (cont.)







# Probleme der Dynamik von Manipulatoren

- **Vorwärtsdynamik:**
  - *Vorgabe*: Gelenkkräfte/-momente;
  - *Gesuchte*: Bewegungsparameter;
  - *Anwendung*: Simulation eines Robotermodells.
- **Inverse Dynamik**:
  - *Vorgabe*: gewünschte Roboterbewegung;
  - *Gesuchte*: erforderliche Gelenkkräfte/-momente;
  - *Anwendung*: Modell-basierte Regelung eines Roboters.

$$\tau(t) \rightarrow \text{Direkte Dynamikgleichung} \rightarrow \mathbf{q}(t), (\dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t))$$
$$\mathbf{q}(t) \rightarrow \text{Inverse Dynamikgleichung} \rightarrow \tau(t)$$

NICHT parallel wie das Problem der Kinematik, ist die invserse Dynamik einfacher zu lösen als die direkte Dynamik.

# Probleme der Dynamik von Manipulatoren

Zwei Berechnungsverfahren:

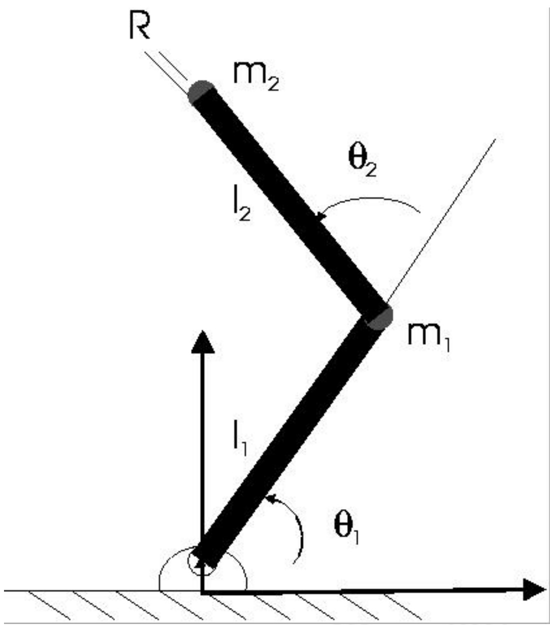
- Analytische Methoden:
  aufgebaut auf Lagrange'schen Gleichungen
- Synthetische Methoden:
  Anwendung der Newton-Euler'schen Gleichungen

Ein Problem mit der Rechnezeit:
Komplexität zur Auswertung des Lagrange-Euler-Modells (siehe die kommenden Seiten): $O(n^4)$ wobei $n$ die Anzahl der Gelenke ist.
$n = 6$: 66,271 Multiplikationen und 51,548 Additionen.





# Beispiel für einen zweigelenkigen Manipulator



# Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - I

nach dem Newton's zweiten Gesetz sind die Kräfte an dem Schwerpunkt des Glieder 1 und 2 jeweils:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$$

wobei

$$\mathbf{r}_1 = 1/2 l_1 (\cos\theta_1 \vec{i} + \sin\theta_1 \vec{j})$$

$$\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}_1 + 1/2 l_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2)\vec{i} + \sin(\theta_1 + \theta_2)\vec{j}]$$



Universität Hamburg
MIN-Fakultät
Department Informatik
Dynamik - Beispiel für einen zweigelenkigen Manipulator
Einführung in die Robotik

# Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - I

Euler'sche Gleichungen:

$$\tau_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_1 \times I_1 \dot{\omega}_1$$

$$\tau_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \times I_2 \dot{\omega}_2$$

wobei

$$I_1 = m_1 {l_1}^2/12 + m_1 R^2/4$$

$$I_2 = m_2 {l_2}^2/12 + m_2 R^2/4$$

# Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - II

Die Winkelgeschwindigkeiten und -Beschleunigungen sind:

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$$

$$\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1$$

$$\dot{\omega}_2 = \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2$$

Da $\omega_i \times \mathbf{I}_i \omega_i = 0$, gilt es dann für die Kraftmomente an dem Schwerpunkt des Glieder 1 und 2:

$$\tau_1 = I_1 \ddot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \tau_1, \tau_2$ werden für die Kraft- und Kraftmoment-Balance verwendet. Dadurch werden die Kraftmomente direkt an Gelenk 1 und 2 gelöst.





# Lagrange'sche Gleichungen

Die lagrange'sche Funktion $L$ wird definiert als die Differenz zwischen der kinetischen Energie $K$ und der potentiellen Energie $P$ des Systems:

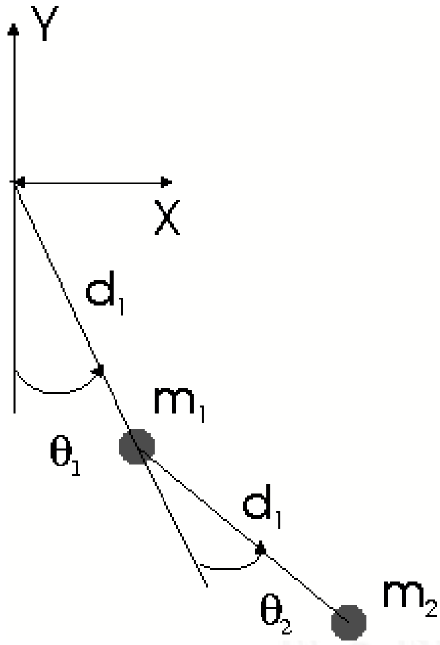
$$L = K - P$$

Satz: Die Bewegungsgleichungen für ein mechanisches System mit allgemeinen Koordinaten $\mathbf{q} \in \Theta^n$ und der lagrange'schen Funktion $L$ sind gegeben über:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

wobei
$q_i$: die Koordinaten, mit den die kinetische und potentielle Energie dargestellt werden;
$\dot{q}_i$: die entsprechende Geschwindigkeit;
$F_i$: die entsprechende Kraft oder das entsprechende Kraftmoment, abhängig davon, ob $q_i$ ein linearer oder Winkel-Geschwindigkeit ist.

# Besipiel 2 für einen zweigelenkigen Manipulator








# Langrage'sche Verfahren für das Beispiel - I

Die kinetische Energie des Masses $m_1$ ist:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 {d_1}^2 {\dot{\theta}_1}^2$$

Die potentielle Energie ist:

$$P_1 = -m_1 g d_1 cos(\theta_1)$$

Die kartesischen Positionen sind:

$$x_2 = d_1 sin(\theta_1) + d_2 sin(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y_2 = -d_1 cos(\theta_1) - d_2 cos(\theta_1 + \theta_2)$$

# Langrage'sche Verfahren für das Beispiel - II

Die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeiten sind:

$$\dot{x}_2 = d_1 cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 + d_2 cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = d_1 sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 + d_2 sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

Das Quadrat der Geschwindigkeitsgröße ist:

$${v_2}^2 = {\dot{x}_2}^2 + {\dot{y}_2}^2$$

Die kinetische Energie des 2. Gelenks ist:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2$$

Die potentielle Energie des 2. Gelenks ist:

$$P_2 = -m_2 g d_1 cos(\theta_1) - m_2 g d_2 cos(\theta_1 + \theta_2)$$





# Langrage'sche Verfahren für das Beispiel - III

Die Langrange'sche Funktion ist:

$$L = (K_1 + K_2) - (P_1 + P_2)$$

Das Kraftmoment auf Gelenk 1 bzw. 2 ist jeweils:

$$\tau_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

# Langrage'sche Verfahren für das Beispiel - III

$\tau_1$ und $\tau_2$ werden schließlich dargestellt als:

$$\begin{aligned}\tau_1 =& D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 \\ &+ D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{121}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 =& D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 \\ &+ D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{221}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_2\end{aligned}$$





# Langrage'sche Verfahren für das Beispiel - III

wobei
$D_{ii}$: die effektive Trägkeit (inertia) auf Gelenk $i$;
$D_{ij}$: die Kopplung-Trägkeit zwischen Gelenk $i$ und $j$;
$D_{ijj}$: die Koeffizienten der zentripetalen Kraft auf Gelenk $i$ wegen der Geschwindigkeit des Gelenk $j$;
$D_{iik}(D_{iki})$: die Koeffizienten der Coriolis-Kraft auf Gelenk $i$ wegen der Geschwindigkeiten des Gelenk $i$ und $k$;
$D_i$: die Schwerkraft auf Gelenk $i$.

# Allgemeine dynamische Gleichungen eines allgemeinen Manipulators - I

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

$M(\Theta)$: die lageabhägige $n \times n$-Massenmatrix eines Manipulators
Für das obige Beispiel:

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

$V(\Theta, \dot{\Theta})$: ein $n \times 1$-Vektor der Zentripetal- und Coriolis-Terme
Für das obige Beispiel:

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{121}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\ D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{221}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$





# Allgemeine dynamische Gleichungen eines allgemeinen Manipulators - I

Ein Term wie $D_{111}\dot{\theta}_1^2$ wird von einer zentrifugalen Kraft verursacht;
Ein Term wie $D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ wird von einer Coriolis-Kraft verursacht und beinhaltet immer das Produkt der beiden Geschwindigkeiten.
$G(\Theta)$: der Schwerkraft-Term, hängt immer von $\Theta$ ab.
Für das obige Beispiel:

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$