

Einführung in die Robotik

Jianwei Zhang
zhang@informatik.uni-hamburg.de

T | A | **M | S** Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Department Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

17. Mai 2011

Gliederung

- Allgemeine Informationen
- Einführung
- Koordinaten eines Manipulators
- Kinematik-Gleichungen
- Inverse Kinematik von Manipulatoren
- Differentielle Bewegungen mit homogenen Transformationen
- Jacobi-Matrix eines Manipulators
- Aufgabenbeschreibung
- Roboterprogrammierung auf drei Ebenen
- Trajektorienengineering
- Trajektorienengineering**
 - Interpolationsverfahren
 - Bernstein-Polynome

Gliederung (cont.)

B-Splines

Einführung in RCCL

Dynamik

Roboterregelung

Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung

Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung

Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung

Architekturen sensorbasierter intelligenter Systeme

Aus- und Rückblick

Interpolation vs. Approximation

Approximation:

Annäherung von Daten bzw. Kurven durch andere Kurven. Ein Beispiel ist die Interpolation.

siehe eine Demo:

http://www.oslo.sintef.no/NAM/people/xic/spline_demo/

Wenn eine Kurve exakt durch alle Daten durchläuft →

Interpolation

Man approximiert wenn sehr viele Meßdaten vorliegen.

Interpolationsverfahren

Generierung von Robotertrajektorien im Gelenkwinkelraum über mehrere Zwischenziele benötigt geeignete Interpolationsverfahren. Einige Interpolationsverfahren mit Polynomen:

- ▶ Lagrange-Polynome (s. ein Beispiel unter <http://www.math.ucla.edu/~baker/java/hoefler/TwoDemos.htm>),
- ▶ Newton-Polynome,
- ▶ Bernstein-Polynome,
- ▶ Basis-Splines (s. ein das gleiche Beispiel unter <http://www.math.ucla.edu/~baker/java/hoefler/TwoDemos.htm>).

Bernstein-Polynome: I

Definition:

Die Bernstein-Polynome der Ordnung $k + 1$ werden wie folgt definiert:

$$B_{i,k}(t) = \binom{k}{i} (1-t)^{k-i} t^i, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

Interpolation mit $B_{i,k}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}_0 B_{0,k}(t) + \mathbf{b}_1 B_{1,k}(t) + \dots + \mathbf{b}_k B_{k,k}(t)$$

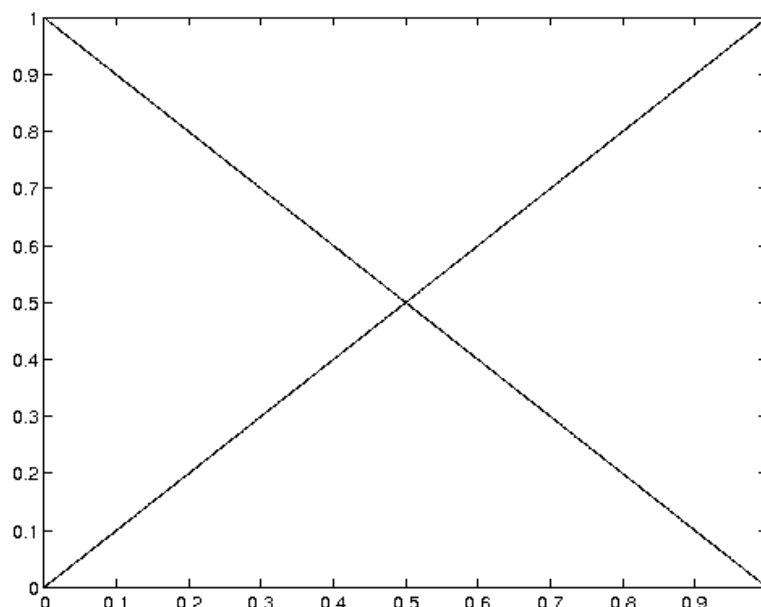
Bernstein-Polynome: I

Die Eigenschaften der Bernstein-Polynome:

- ▶ “partition of unity”: $\sum_{i=0}^k B_{i,k}(t) \equiv 1$,
- ▶ “positivity”: $B_{i,k}(t) \geq 0$ für $t \in [0, 1]$,
- ▶ “recursion”: $B_{i,k}(t) = (1 - t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)$.

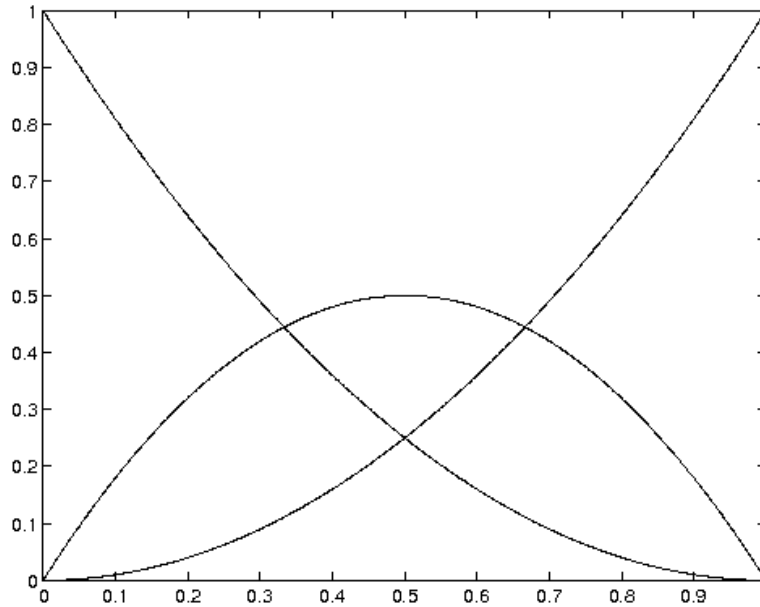
Bernstein-Polynome: II

Ordnung 2:



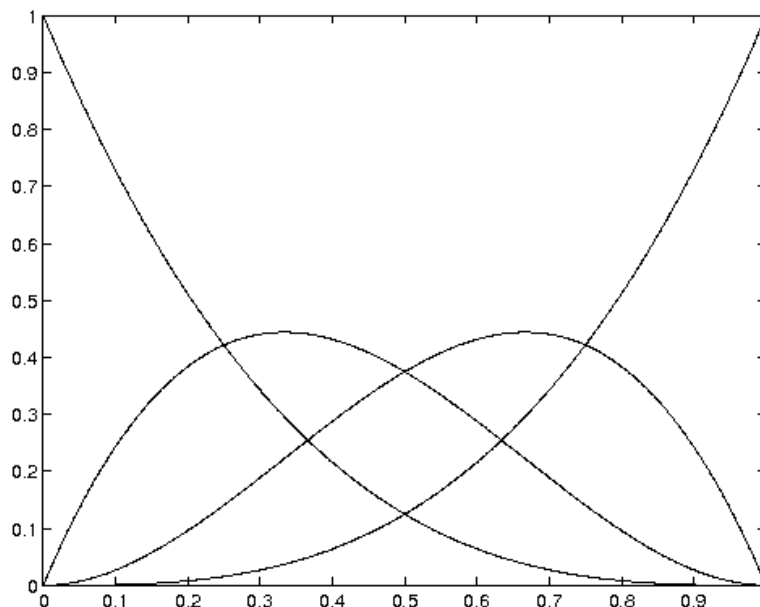
Bernstein-Polynome: II

Ordnung 3:



Bernstein-Polynome: II

Ordnung 4:



B-Spline-Kurve und -Basisfunktionen

Eine **B-Spline-Kurve** der Ordnung k ist ein stückweise aus **B-Splines (Basisfunktion)** zusammengesetztes Polynom vom Grad $(k - 1)$, das an den Segmentübergängen im allgemeinen C^{k-2} stetig differenzierbar ist.

Dabei seien B-Splines Stückweise Polynome, denen die folgenden geordneten Parameterwerte zugrundeliegen:

wobei $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+k})$,

- ▶ m : wird von der Anzahl der zu interpolierenden Punkte bestimmt
- ▶ k : die festgelegte Ordnung der B-Spline-Kurve

Definition der B-Splines

Als normalisierte B-Splines $N_{i,k}$ der Ordnung k (vom Grad $k - 1$) werden folgende Funktionen bezeichnet:

Für $k = 1$,

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & : \text{für } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

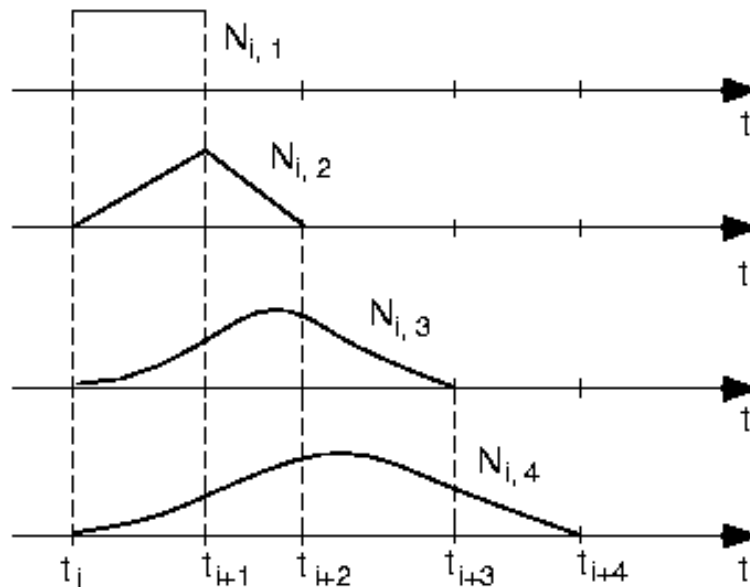
sowie für $k > 1$, eine rekursive Darstellung:

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

mit $i = 0, \dots, m$.

Beispiele von B-Splines

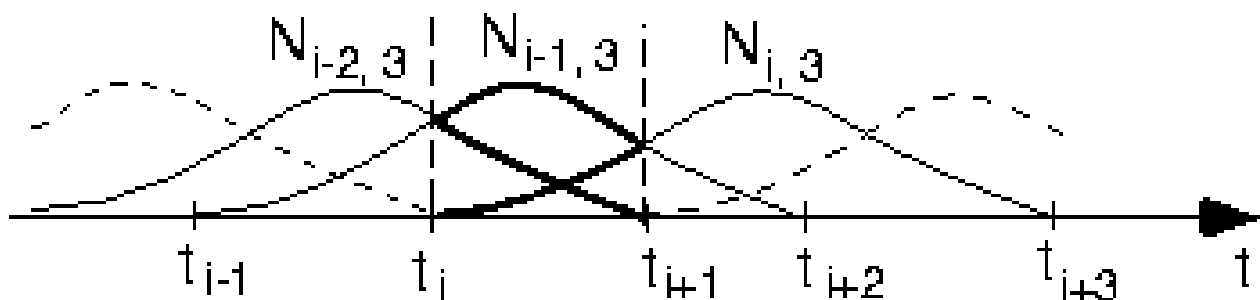
B-Splines der Ordnung 1, 2, 3 und 4:



Beispiele von B-Splines

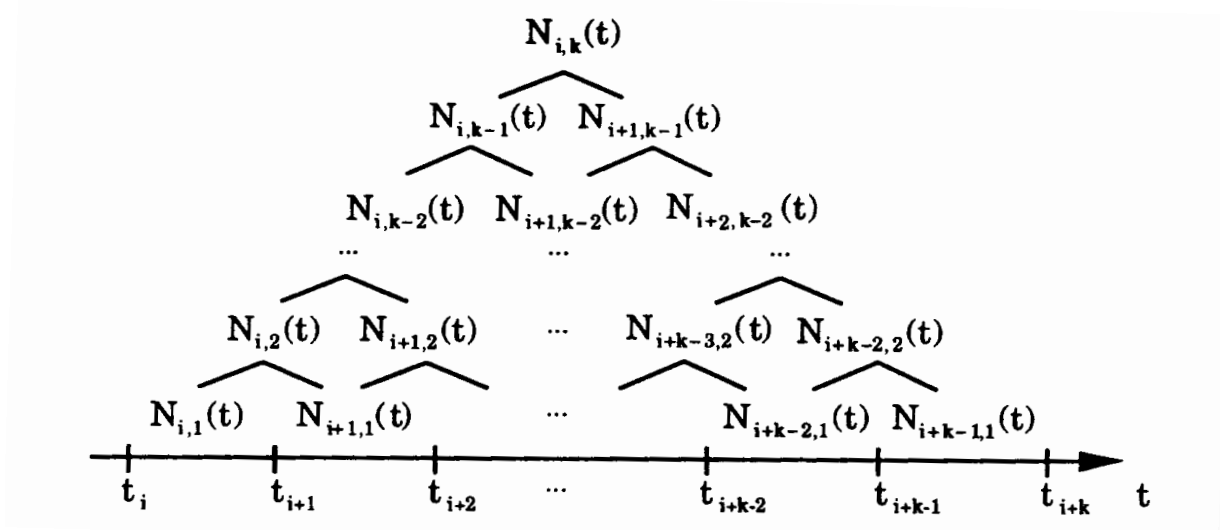
Innerhalb eines Parameterintervalls gibt es k sich überlappende B-Splines.

Ein Beispiel der kubischen B-Splines:



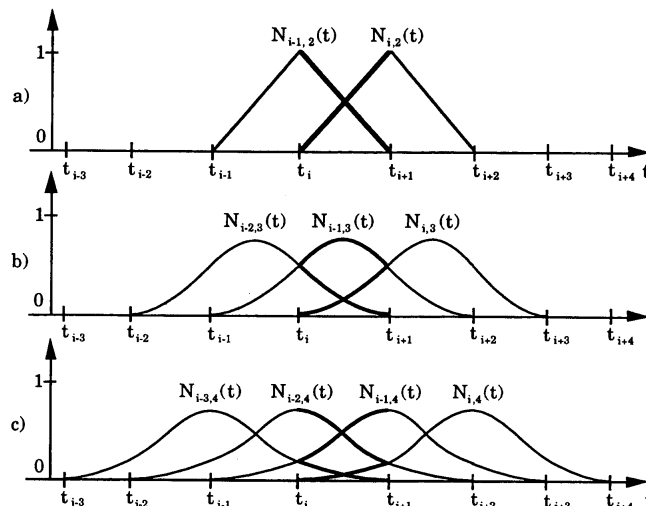
B-Splines der Ordnung k

Das rekursive Definitionsverfahren einer B-Spline-Basisfunktion $N_{i,k}(t)$:

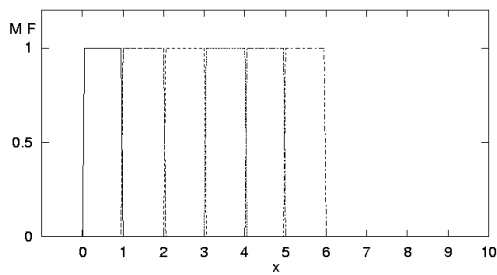


B-Splines der Ordnung k

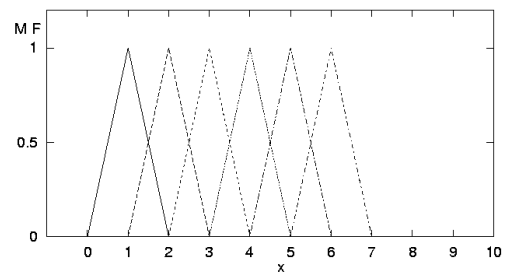
Aktuelle Segmente der B-Spline-Basisfunktionen der Ordnungen 2, 3 und 4 für $t_i \leq t < t_{i+1}$:



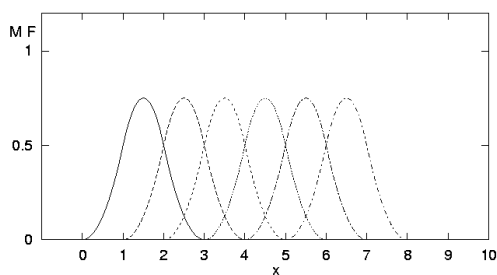
Uniforme B-Splines der Ordnung 1 bis 4



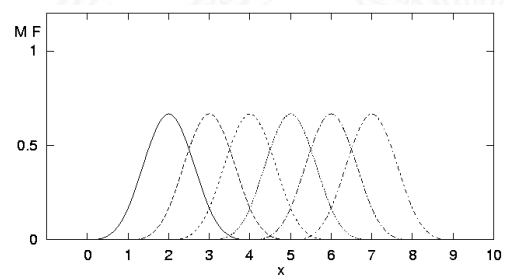
$k=1$



$k=2$



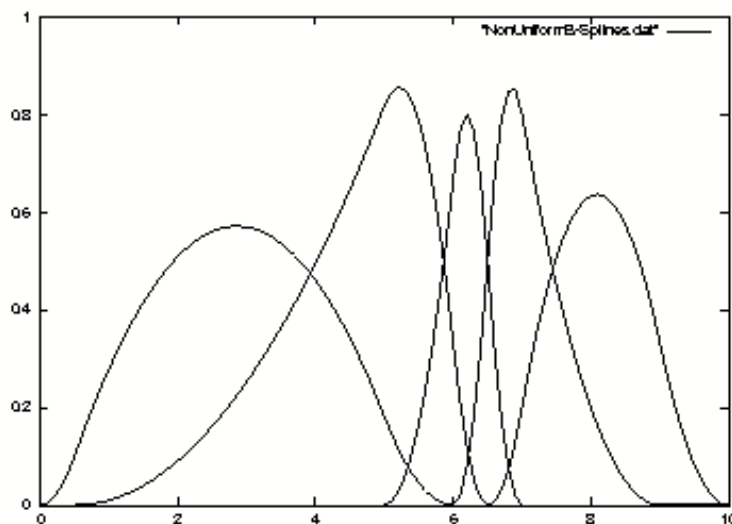
$k=3$



$k=4$

Nichtuniforme B-Splines

Ordnung 3:



Eigenschaften der B-Splines

Partition of unity: $\sum_{i=0}^k N_{i,k}(t) = 1.$

Positivity: $N_{i,k}(t) \geq 0.$

Local support: $N_{i,k}(t) = 0$ for $t \notin [t_i, t_{i+k}]$.

C^{k-2} *continuity:* If the knots $\{t_i\}$ are pairwise different from each other, then $N_{i,k}(t) \in C^{k-2}$, i.e. $N_{i,k}(t)$ is $(k - 2)$ times continuously differentiable.

Gewinnung einer B-Spline-Kurve

Eine B-Spline-Kurve kann dadurch konstruiert werden, dass eine Menge von vorgegebenen Größen mit diesen B-Splines gemischt werden:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{v}_j \cdot N_{j,k}(t)$$

wobei \mathbf{v}_j *Kontrollpunkte (de Boor-Punkte)* genannt werden.

Sei ein Parameter t gegeben, wobei $\mathbf{r}(t)$ ein Punkt dieser B-Spline-Kurve ist.

Wenn t von t_{k-1} bis zu t_{m+1} variiert, so stellt $\mathbf{r}(t)$ eine C^{k-2} stetig differenzierbare Kurve dar.

Berechnung von Kontrollpunkten aus Datenpunkten

Die Punkte \mathbf{v}_j sind nur bei $k = 2$ identisch mit den Datenpunkten zur Interpolation, sonst nicht.

Ein Kontrollpunktzug bildet eine konvexe Hülle für die Interpolationskurve.

Zwei Verfahren zur Berechnung von Kontrollpunkten aus Datenpunkten:

- 1 Durch die Lösung des folgenden Gleichungssystems (**Böhm84**):

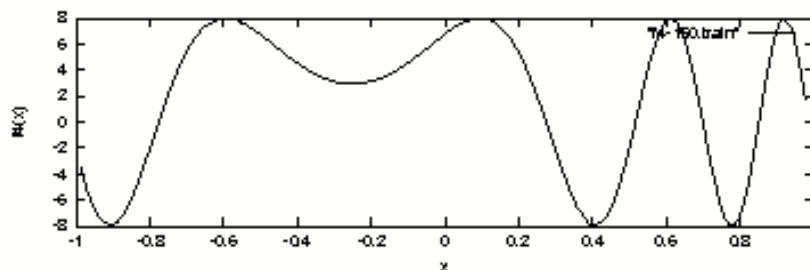
$$\mathbf{q}_j(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{v}_j \cdot N_{j,k}(t)$$

wobei \mathbf{q}_j die Datenpunkte für die Interpolation sind, $j = 0, \dots, m$.

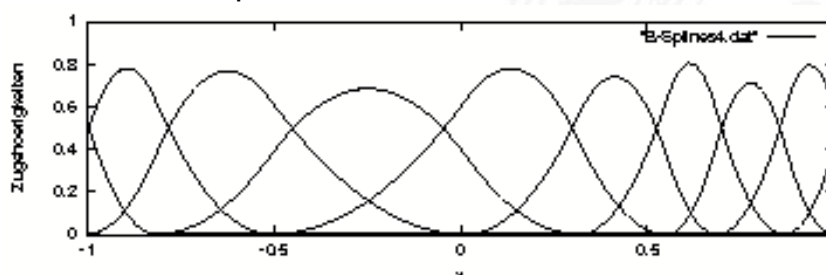
- 2 Durch Lernen basierend auf dem Gradient-Abstieg (**Zhang98**).

Funktionsapproximation - 1D Beispiel

Eine Testfunktion $f_4(x) = 8\sin(10x^2 + 5x + 1)$ mit $-1 < x < 1$:

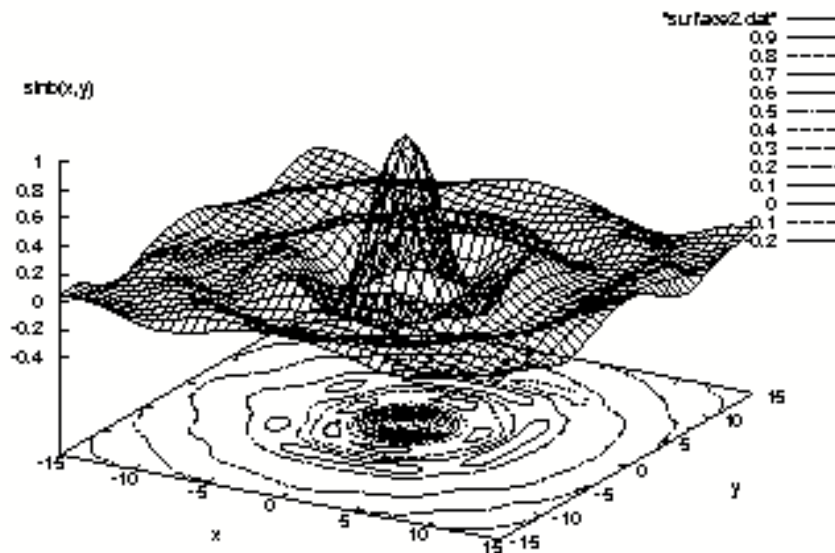


Die richtig verteilten B-Splines:

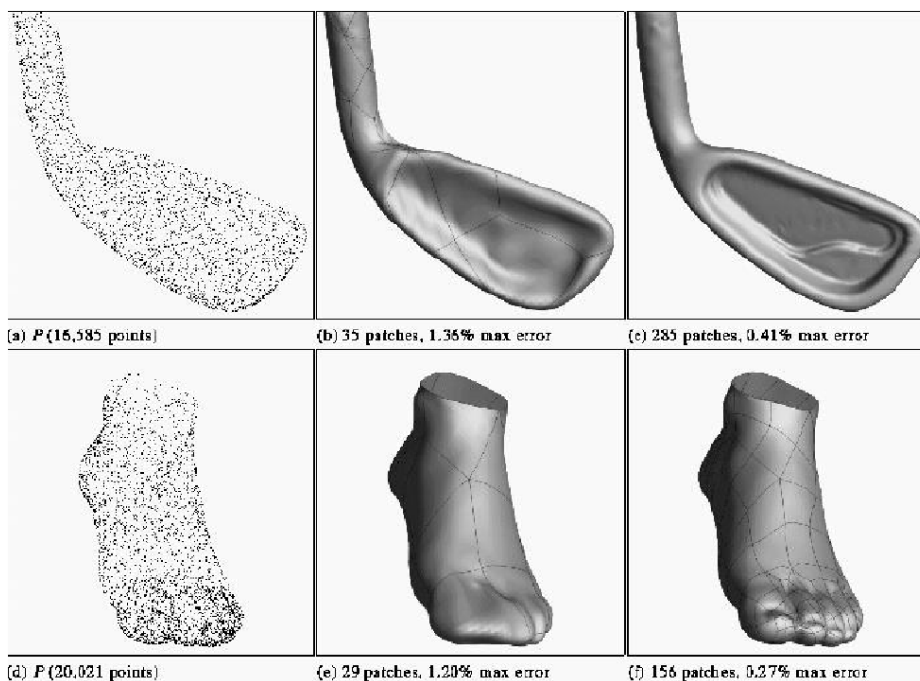


Funktionsapproximation - 2D Beispiel

Approximation der Funktion $\sin b(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2} / \sqrt{x^2 + y^2})$



Modellierung mit B-Splines – Beispiele mit 3D Objekten



Modellierung mit B-Splines – Beispiele mit 3D Objekten

