Einführung in die Robotik

Jianwei Zhang
zhang@informatik.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Department Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

12. Mai 2009

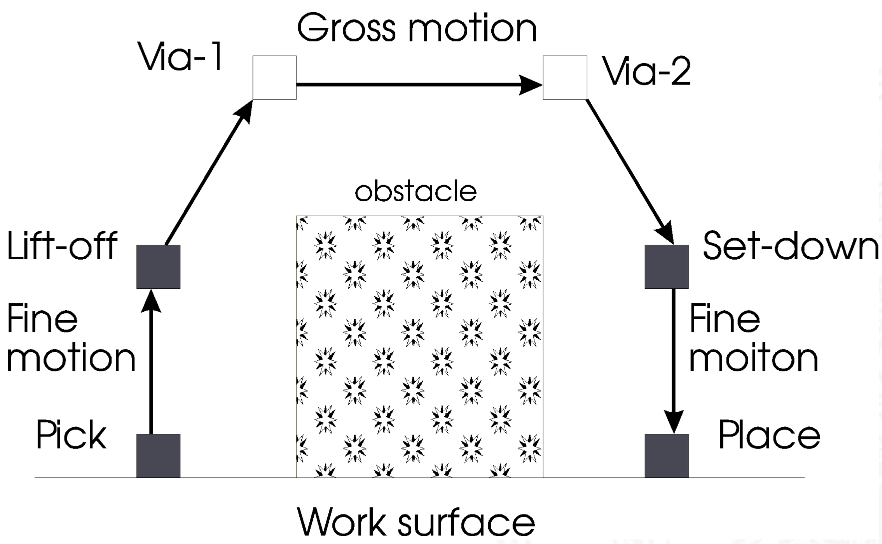
Gliederung

Gliederung (cont.)

MIN-Fakultät
Department Informatik
Universität Hamburg
Trajektoriegenerierung Einführung in die Robotik

Gliederung (cont.)

"Pick-and-Place"-Operation und ihre Randbedingungen (Constraints)



(via points: Zwischenpunkte)

Universität Hamburg
MIN-Fakultät
Department Informatik
Trajektoriegenerierung
Einführung in die Robotik

"Pick-and-Place"-Operation und ihre Randbedingungen (Constraints)

(a) "Pick": Position (gegeben), Geschwindigkeit und Beschleunigung (gegeben, normal Null)

(b) "Lift-off": stetige Bewegung bei den Zwischenpunkten

(c) "Set-down": gleich wie (b)

(d) "Place": gleich wie (a)

Generierung von Trajektorien - I

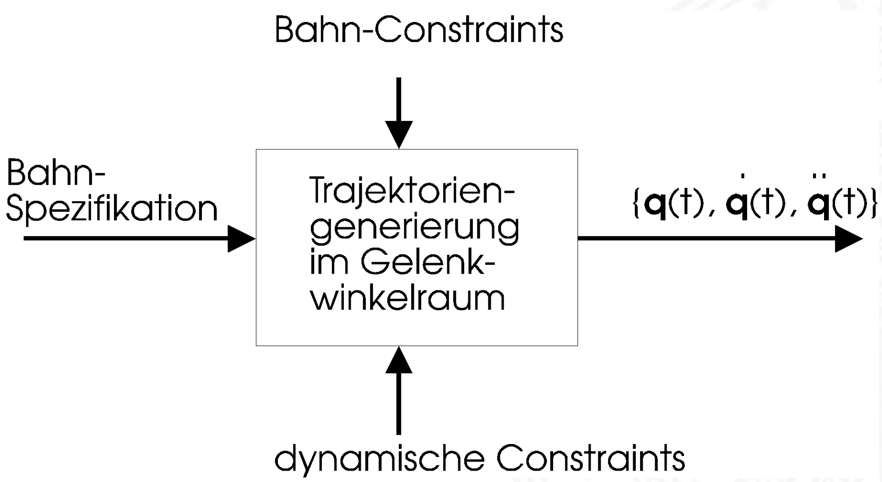
Aufgabe:
Berechne, interpoliere oder approximiere die erwünschte Bahn mit eine Menge von stetigen Funktionen bezüglich der Zeit, um den Roboter von einem Startpunkt zu einer Zielpunkt steuern zu können. Die Start- und Zielpunkte können mit Weltkoordinaten oder Gelenkkoordinaten spezifiziert werden.
Zwei Strategien für die Lösung:
Die Trajektoriengenerierung wird durchgeführt im

- Kartesischen Raum:
  - nähere Aufgabenstellung
  - Möglichkeit für Kollisionvermeidung

Universität Hamburg
MIN-Fakultät
Department Informatik
Trajektoriegenerierung - Generierung von Trajektorien
Einführung in die Robotik

Generierung von Trajektorien - II

- Gelenkwinkelraum:
  - Die geplanten Trajektorien unmittelbar ausführbar
  - Keine Berechnung der inversen Kinematik nötig
  - Berücksichtigung von Grenzwerten



Trajektorien im multidimensionalen Raum

Untersucht wird der Zeitverlauf der Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung aller Gelenke.
Die **Trajektorie** auf einem Freiheitsgrad i ist eine parametrisierte Funktion $q^i(t)$ mit Werten in seinem Bewegungsbereich.
Die Trajektorie eines Roboters mit n Freiheitsgraden ist dann ein Vektor von solchen parametrischen Funktionen mit einem gemeinsamen Parameter:

$$\mathbf{q}(t) = [q^1(t), q^2(t), \ldots, q^n(t)]^T$$

Eine Trajektorie ist C^k-stetig, wenn alle Ableitungen bis zur k-ten (einschließlich) ihres Positionsprofils existieren und stetig sind.
Eine Trajektorie ist *glatt*, wenn sie mindestens C^2-stetig ist.

Anmerkungen zur Trajektoriengenerierung

- Die erste Ableitung der Trajektorie bezüglich der Zeit: die Geschwindigkeit
- Die zweite Ableitung: die Beschleunigung
- Die dritte Ableitung: der Ruck

Anmerkungen zur Trajektoriengenerierung

- Die glattesten Kurven: mit unendlich oft differenzierbaren Funktionen definierte Kurven.
  Beispiele: e^x,
  $sin\ x$,
  und
  $log\ x\ (x > 0)$.
- Polynome für Interpolation geeignet (aber zu hohe Grade führen zur Oszillation).
- Stückweise Polynome mit bestimmten Graden anwendbar: kubische Polynome, Splines, B-Splines usw.

Kubische Polynome zwischen zwei beliebigen Konfigurationen - I

Wenn die Start- und Endgeschwindigkeit beiden Null sind: dann gilt es:

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\theta(t_f) = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 0$$

Kubische Polynome zwischen zwei beliebigen Konfigurationen - I

vier Constraints $\Rightarrow$ eine Polynome der Ordnung vier:

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

Universität Hamburg
MIN-Fakultät
Department Informatik
Trajektoriegenerierung - Kubische Polynome zwischen zwei beliebigen Konfigurationen
Einführung in die Robotik

Kubische Polynome zwischen zwei beliebigen Konfigurationen - II

Die Lösung:

$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0)$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0)$$

Kubische Polynome für eine Trajektorie mit Zwischenpunkten

Die Positionen der Zwischenpunkte sind ebenfalls bekannt. Nur die Geschwindigkeiten bei den Zwischenpunkten sind nicht mehr Null:

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

$$\dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f$$

Die Lösung:

$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = \dot{\theta}_0$$

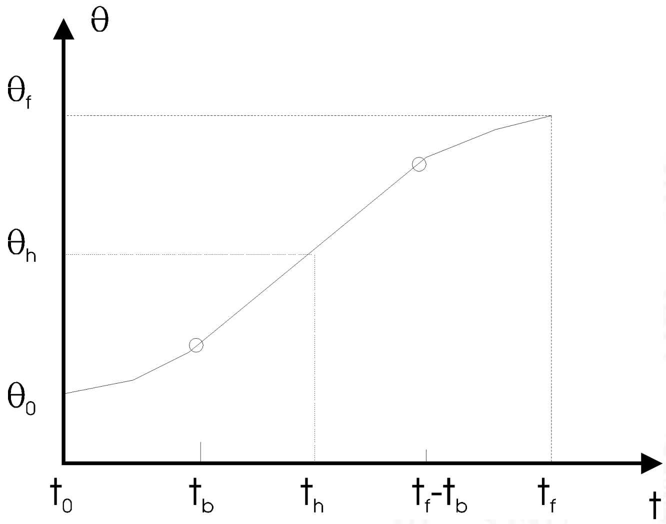
Universität Hamburg
MIN-Fakultät
Department Informatik
Trajektoriegenerierung - Kubische Polynome zwischen zwei beliebigen Konfigurationen
Einführung in die Robotik

Kubische Polynome für eine Trajektorie mit Zwischenpunkten

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)$$

Lineare Funktion mit parabolischen Übergängen



$$\ddot{\theta} \cdot t_b = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b}$$

Universität Hamburg
MIN-Fakultät
Department Informatik
Trajektoriegenerierung - Lineare Funktion mit parabolischen Übergängen
Einführung in die Robotik

Lineare Funktion mit parabolischen Übergängen

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2}\ddot{\theta} t_b^2$$

Wenn $t = 2t_h$, bekommen wir:

$$\ddot{\theta} t_b^2 - \ddot{\theta} t t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0$$

$$t_b = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}}$$

Die Einschränkung der Beschleunigung ist:

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t^2}$$

Bestimmung der Geschwindigkeiten bei den Zwischenpunkte

- Manuelle Spezifikation basierend auf der Kartesischen linearen und Winkelgeschwindigkeit des Tool-Frames;
- Automatische Berechnung mit Hilfe von Heuristiken im Kartesischen Raum oder Gelenkwinkelraum;
- Automatische Auswahl so daß die Beschleunigung bei den Zwischenpunkten stetig ist.

Faktoren für zeitoptimale Bewegungen - Bogenlänge

Gegeben sei eine Kurve im n-dimensionalen K-Raum

$$\mathbf{q}(t) = [q^1(t), q^2(t), \ldots, q^n(t)]^T$$

dann ist die **Bogenlänge** als ein natürlicher Parameter wie folgt definiert:

$$s = \int_0^t |\dot{\mathbf{q}}(t)| \, dt$$

wobei $|\dot{\mathbf{q}}(t)|$ die euklidische Norm des Vektors $d\mathbf{q}(t)/dt$ ist und als die Flußgeschwindigkeit entlang der Kurve bezeichnet wird.
Gegeben seien zwei Punkte $\mathbf{p}_0 = \mathbf{q}(t_s)$ und $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}(t_z)$,

Faktoren für zeitoptimale Bewegungen - Bogenlänge

dann ist die Bogenlänge L zwischen $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{p}_1$ das Integral:

$$L = \int_0^L ds = \int_{t_s}^{t_z} |\dot{\mathbf{q}}(t)| \, dt$$

„Die Parameter einer Trajektorie sollen so entworfen werden, daß die Bogenlänge der Trajektorie L möglichst kurz gehalten wird.“

Faktoren für zeitoptimale Bewegungen - Krümmung

Zuerst wird ein *Einheitstangentenvektor* der Kurve $\mathbf{q}(t)$ folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{q}(t)}{ds} = \frac{d\mathbf{q}(t)/dt}{ds/dt} = \frac{\dot{\mathbf{q}}(t)}{|\dot{\mathbf{q}}(t)|}$$

Seien s als der Parameter der Bogenlänge und $\mathbf{U}$ als der Einheitstangentenvektor vorgegeben, so wird die **Krümmung** einer Kurve $\mathbf{q}(t)$ definiert:

$$\kappa(s) = |\frac{d\mathbf{U}}{ds}|$$

Seien nur der Parameter t, die erste Ableitung $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}(t)/dt$ und die zweite Ableitung $\ddot{\mathbf{q}} = d\dot{\mathbf{q}}(t)/dt$ der Kurve $\mathbf{q}(t)$ vorgegeben, dann kann die **Krümmung** aus der folgenden Darstellung berechnet werden:

Faktoren für zeitoptimale Bewegungen - Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{q}} \times \ddot{\mathbf{q}}|}{|\dot{\mathbf{q}}^3|} = \frac{\left(\dot{\mathbf{q}}^2\ddot{\mathbf{q}}^2 - (\dot{\mathbf{q}} \cdot \ddot{\mathbf{q}})^2\right)^{1/2}}{|\dot{\mathbf{q}}|^{3/2}}$$

wobei $\dot{\mathbf{q}} \times \ddot{\mathbf{q}}$ das Kreuzprodukt und $\dot{\mathbf{q}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}$ das Skalarprodukt von $\dot{\mathbf{q}}$ und $\ddot{\mathbf{q}}$ sind.
Die **Biegeenergie** einer glatten Kurve $\mathbf{q}(t)$ über dem Intervall $t \in [0, T]$ ist definiert als

$$E = \int_0^L \kappa(s)^2 \, ds = \int_0^T \kappa(t)^2 |\dot{\mathbf{q}}(t)| \, dt$$

wobei $\kappa(t)$ die Krümmung von $\mathbf{q}(t)$ ist.

> *„Die Biegeenergie E einer Trajektorie soll unter Mitberücksichtigung der Bogenlänge L möglichst klein gehalten werden.“*

Faktoren für zeitoptimale Bewegungen - Bewegungszeit

Sei

$$u_i = t_{i+1} - t_i$$

die gebrauchte Zeit für Bewegung im Segment $\mathbf{q}_i$.
Die gesamte Bewegungszeit ist dann:

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} u_i$$

Dynamische Constraints aller Gelenke

Die Grenze der minimalen Bewegungszeit einer Teiltrajektorie $\mathbf{q}_j^i(t)$ wird durch die dynamischen Parameter aller Gelenke bestimmt. Für das Gelenk i können solche Beschränkungen wie folgt dargestellt werden:

$$|\dot{q}_j^i(t)| \leq \dot{q}_{max}^i$$

$$|\ddot{q}_j^i(t)| \leq \ddot{q}_{max}^i$$

$$|u_j^i(t)| \leq u_{max}^i$$

Dynamische Constraints aller Gelenke

wobei i $(i = 1, \ldots, n)$ die Gelenknummer ist, und j $(j = 1, \ldots, m)$ die Nummer der Teiltrajektorie repräsentiert.

u^i ist das Kraftmoment des Robotergelenks i und wird aus der Dynamikgleichung (Bewegungsgleichung) berechnet.

$\dot{q}_{max}^i$, $\ddot{q}_{max}^i$ und u_{max}^i repräsentieren die wichtigsten Parameter der dynamischen Kapazität eines Roboters.

Probleme der Trajektoriengenerierung im Kartesischen Raum

- Zwischenpunkte nicht erreichbar
- Zu hohe Geschwindigkeit in der Nähe von Singulären Konfigurationen
- Start- und Zielkonfigurationen erreichbar aber sie gehören zu verschiedenen Lösungen.

Bewegung entlang einer geraden Linie $< \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 >$

Für einen gegebenen Wert $\epsilon > 0$, soll der folgende Algorithmus möglichst wenige Zwischenpunkte im Gelenkwinkelraum erzeugen, die aber erfüllen, dass die Abweichung der durch diese Zwischenpunkte gehenden Trajektorie zu der geraden Linien $< \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 >$ nicht größer als ϵ ist.
Algorithmus(Bounded_Deviation)

1. Berechnung der entsprechenden Konfigurationen $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ aus $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$ mit Hilfe der Gleichungen der inversen Kinematik.
2. Berechnung des Mittelpunktes im Gelenkwinkelraum:

$$\mathbf{q}_m = \frac{\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1}{2}$$

Bewegung entlang einer geraden Linie $< \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 >$

3. Berechnung der entsprechenden Punkte von $\mathbf{q}_m$ im Arbeitsraum mit Hilfe der direkten Kinematik:

$$\mathbf{w}_m = W(\mathbf{q}_m)$$

4. Bestimmung des exakten Mittelpunktes im Arbeitsraum:

$$\mathbf{w}_M = \frac{\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1}{2}$$

5. Wenn die Abweichung $||\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_M|| \leq \epsilon$, dann abbrechen; sonst $\mathbf{w}_M$ als Knotenpunkt zwischen $\mathbf{w}_0$ und $\mathbf{w}_1$ einfügen.
6. Rekursive Anwendungen des Algorithmus für die zwei neue Segmente $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_M)$ und $(\mathbf{w}_M, \mathbf{w}_1)$.