

# Einführung in die Robotik

**Jianwei Zhang**  
zhang@informatik.uni-hamburg.de

**T | A** Universität Hamburg  
**M | S** Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Department Informatik  
**Technische Aspekte Multimodaler Systeme**

21. April 2008

## Gliederung

Allgemeine Informationen

Einführung

Koordinaten eines Manipulators

**Kinematik-Gleichungen**

Denavit-Hartenberg-Konvention

Parameter zur Beschreibung von zwei beliebigen Gelenken

Frame-Transformation zwischen zwei Gelenken

Beispiel mit PUMA 560

Inverse Kinematik von Manipulatoren

Differentielle Bewegungen mit homogenen Transformationen

Jacobi-Matrix eines Manipulators

Aufgabenbeschreibung

Roboterprogrammierung auf drei Ebenen

## Gliederung (cont.)

Trajektoriegenerierung  
Trajektoriengenerierung  
Einführung in RCCL  
Dynamik  
Roboterregelung  
Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung  
Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung  
Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung  
Architekturen sensorbasierter intelligenter Systeme  
Aus- und Rückblick

## Kinematik-Gleichungen - (1)

Jeder Manipulator kann als eine Reihe von mit Gelenken verbundenen Gliedern betrachtet werden.

In jedem Glied wird ein Koordinaten-Frame definiert.

Eine homogene Matrix  $A$  beschreibt die relative Translation und Rotation zwischen zwei aufeinander folgenden Gelenken.

Für einen sechsgelenkigen Manipulator:

- ▶  $A_1$ : beschreibt die Position und Orientierung des ersten Gliedes;
- ▶  $A_2$ : beschreibt die Position und Orientierung des 2. Gliedes bezüglich Glied 1;
- ▶  $A_3$ : beschreibt die Position und Orientierung des 3. Gliedes bezüglich Glied 2;

## Kinematik-Gleichungen - (1)

- ▶  $A_4$ : beschreibt die Position und Orientierung des 4. Gliedes bezüglich Glied 3;
- ▶  $A_5$ : beschreibt die Position und Orientierung des 5. Gliedes bezüglich Glied 4;
- ▶  $A_6$ : beschreibt die Position und Orientierung des 6. Gliedes bezüglich Glied 5;

Das folgende Produkt wird definiert als:

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

## Beschreibung des Manipulator-Endpunktes (Tag Point)

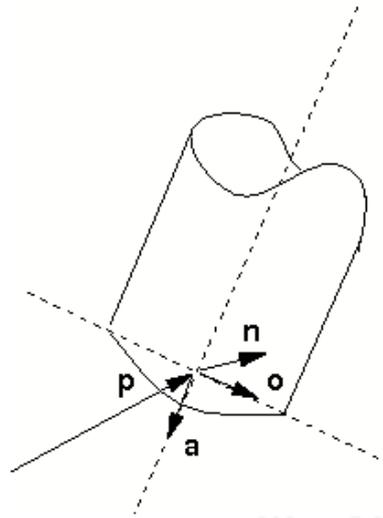
Mit einem Vektor  $\mathbf{p}$  wird der Manipulator-Endpunkt beschrieben.

Drei Einheitsvektoren:

- ▶  $\mathbf{a}$ : (Annäherungsvektor, "approach vector"),
- ▶  $\mathbf{o}$ : (Schließvektor, "orientation vector"),
- ▶  $\mathbf{n}$ : (Normalenvektor)

spezifizieren die Orientierung der Hand.

## Beschreibung des Manipulator-Endpunktes (Tag Point)



Die Transformation  $T_6$  hat dann die folgenden Elementen:

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Denavit-Hartenberg-Konvention

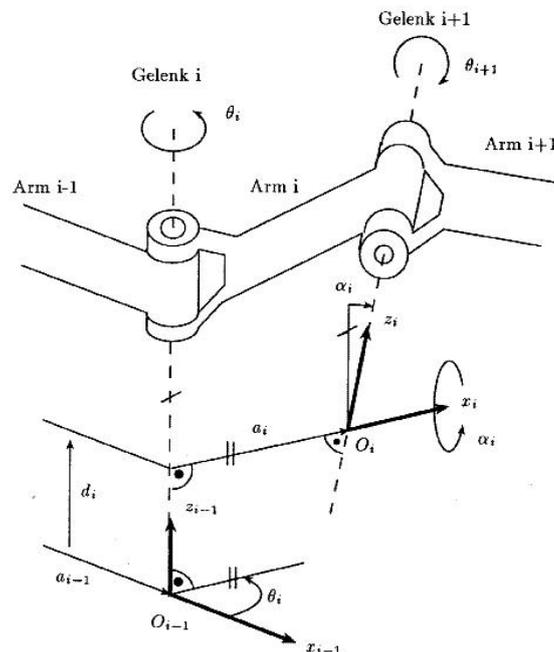
**Ausgangspunkt:**

Das Koordinatensystem  $\Sigma_0$  ist das ortsfeste Ausgangskordinatensystem in der Basis des Manipulators.

Für die Festlegung des Koordinatensystems gilt:

- ▶ Die  $z_i$ -Achse wird entlang der Bewegungsachse des  $(i+1)$ -ten Gelenks gelegt.
- ▶ Die  $x_i$ -Achse ist senkrecht zur  $z_{i-1}$ -Achse und zeigt von ihr weg.
- ▶ Die  $y_i$ -Achse wird so festgelegt, daß sich ein rechthändiges Koordinatensystem ergibt.

## Parameter zur Beschreibung von zwei beliebigen Gelenken



## Parameter zur Beschreibung von zwei beliebigen Gelenken

Zwei Parameter zur Bestimmung der Struktur des Gelenkes  $i$ :

- ▶  $a_i$ : die kürzeste Entfernung zwischen der  $z_{i-1}$ -Achse und der  $z_i$ -Achse
- ▶  $\alpha_i$ : der Drehwinkel um die  $x_i$ -Achse, der die  $z_{i-1}$ -Achse auf die  $z_i$ -Achse ausrichtet

Zwei Parameter zur Bestimmung der relativen Distanz und Winkel der benachbarten Gelenke:

- ▶  $d_i$ : die Entfernung vom Ursprung  $O_{i-1}$  des  $(i-1)$ -ten Koordinatensystems bis zum Schnittpunkt der  $z_{i-1}$ -Achse mit der  $x_i$ -Achse.
- ▶  $\theta_i$ : der Gelenkwinkel um die  $z_{i-1}$ -Achse von der  $x_{i-1}$ -Achse zur Projektion der  $x_i$ -Achse in die  $x_{i-1}, y_{i-1}$ -Ebene.

## Frame-Transformation zwischen zwei Gelenken - (1)

Erstellung der Beziehung zwischen Frame  $i$  und Frame  $(i-1)$  über die folgenden Rotationen und Translationen:

- ▶ Drehe um  $z_{i-1}$  mit einem Winkel  $\theta_i$
- ▶ Verschiebe entlang  $z_{i-1}$  um  $d_i$
- ▶ Verschiebe entlang gedrehtem  $x_{i-1} = x_i$  um eine Länge  $a_i$
- ▶ Drehe um  $x_i$  mit dem Winkel  $\alpha_i$

Als das Produkt von vier homogenen Transformationen, die den Koordinaten-Frame  $i$  in den Koordinaten-Frame  $i-1$  überführen, kann die Matrix  $A_i$  wie folgt berechnet werden:

$$A_i = Rot_{z_{i-1}, \theta_i} Trans_{(0,0,d_i)} Trans_{(a_i,0,0)} Rot_{x_i, \alpha_i}$$

## Frame-Transformation zwischen zwei Gelenken - (2)

$$\begin{aligned}
 A_i &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Beispiel mit PUMA 560

Um das Manipulator-Ende in das Basis-Koordinatensystem zu überführen, wird  $T_6$  wie folgt berechnet:

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

Z: Transformation Manipulator-Basis  $\rightarrow$  Referenz-Koordinatensystem

E: Manipulator-Ende  $\rightarrow$  TCP ("tool center point")

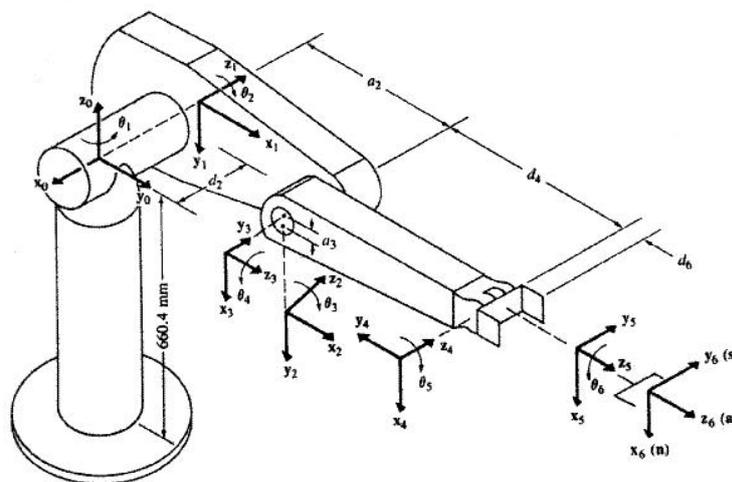
X: die Position und Orientierung des TCP bezüglich des Referenz-Koordinatensystems

$$X = Z T_6 E$$

Es gilt auch:

$$T_6 = Z^{-1} X E^{-1}$$

## Beispiel mit PUMA 560



## Beispiel mit PUMA 560

Gelenk $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	Gelenk-Bereich
1	90	-90	0	0	-160 zu 160
2	0	0	431.8 mm	149.09 mm	-225 zu 45
3	90	90	-20.32 mm	0	-45 zu 225
4	0	-90	0	433.07 mm	-110 zu 170
5	0	90	0	0	-100 zu 100
6	0	0	0	56.25 mm	-266 zu 266

### Gelenk-Koordinaten-Parameter von PUMA 560

## T6-Matrix für PUMA 560 - (1)

$$T' = A_1 A_2 A_3$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$T'' = A_4 A_5 A_6$$

## T6-Matrix für PUMA 560 - (1)

$$= \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei  $C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j)$  und  $S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j)$ .

## T6-Matrix für PUMA 560 - (2)

$$T_6 = T' T'' = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei

$$n_x = C_1 [C_{23}(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6)$$

...