WS 2004/05

Übungen
Technische Informatik 1 (T1)

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 Fehlerkorrigierende Codes (4 Punkte)

Als *Hamming*-Codes bezeichnet man eine Klasse von Codes, die Einzelbitfehler korrigieren können. Der folgende 7 Bit Hamming-Code besitzt vier Informationsbits (I) und drei Prüfbits (P), so dass insgesamt $2^4 = 16$ Informationen codierbar sind.

	Codewortstelle								Codewortstelle						
Nr.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	Nr.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
0	0	0	0	0	0	0	0	8	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1	9	0	0	1	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1	0	10	1	0	1	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	1	1	11	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	1	1	0	0	12	0	1	1	1	1	0	0
5	0	1	0	0	1	0	1	13	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1	1	0	14	0	0	1	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	1	1	15	1	1	1	1	1	1	1

Der Code ist derart aufgebaut, dass die erste Prüfstelle a_1 die Informationsbits a_3, a_5 und a_7, die Prüfstelle a_2 die Stellen a_3, a_6 und a_7 und die Prüfstelle a_4 die Stellen a_5, a_6 und a_7 kontrollieren (siehe Prüfschema):

Codewortstelle	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Bedeutung	P	P	I	P	I	I	I
Prüfgruppe A	x		x		x		x
Prüfgruppe B		x	x			x	x
Prüfgruppe C				x	x	x	x

a) Zeigen Sie, ob und wie auftretende Einzelbitfehler lokalisiert und damit korrigiert werden können. Verfälschen Sie dazu die Codewortstelle a_5 des 9. Codewortes und bilden Sie die Prüfworte.

b) Um einen Einzelbitfehler zu lokalisieren, bildet man aus den Prüfgruppen A, B und C das Prüfwort mit den Stellen x_a, x_b, x_c, wobei gilt:

$$\begin{aligned} x_a &= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) \bmod 2 \\ x_b &= (a_2 + a_3 + a_6 + a_7) \bmod 2 \\ x_c &= (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \bmod 2. \end{aligned}$$

Wie wird der Index i einer fehlerhaften Codewortstelle errechnet?

Aufgabe 3.2 Informationstheorie (3 Punkte)

Repräsentieren Sie die Dezimalziffern (0-9) mit 4-Bit-Wörtern.

- **a)** Berechnen Sie den Entscheidungsgehalt und die Redundanz.
- **b)** Reduzieren Sie die Redundanz, indem Sie die Dezimalziffern auf einen Code mit variabler Länge abbilden.
- **c)** Versuchen Sie wiederum die Redundanz zu verkleinern, indem Sie jeweils zwei Dezimalziffern zu einem Codewort zusammenfassen.

Aufgabe 3.3 Optimale Codierung (2 Punkte)

Bestimmen Sie einen Fano-Code für die folgenden Codewörter mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und berechnen Sie den mittleren Informationsgehalt.

Codewörter	a	b	c	d	e	f	g
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Aufgabe 3.4 Gruppe (2 Punkte)

Beweisen Sie:
Die Menge $\mathbb{M} = \{'-1',' +1'\}$ ist mit der üblichen Multiplikation eine kommutative Gruppe.

Aufgabe 3.5 Körper (2 Punkte)

Machen Sie $\mathbb{M}$ aus Aufgabe 3.4 zu einem Körper mit der dort definierten Operation als Addition und '+1' als Null, indem Sie zusätzlich auf $\mathbb{M}$ in geeigneter Weise eine Multiplikation definieren.

Aufgabe 3.6 Gleichungssystem (2 Punkte)

Lösen Sie im Körper $\mathbb{M}$ aus Aufgabe 3.5 folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & '-1' \\ & & y & + & z & = & '+1' \\ x & + & y & + & z & = & '-1' \end{array}$$

Aufgabe 3.7 Kanonische Formen (6 Punkte)

Folgende Funktionen sind in den kanonischen DNF, KNF und Read-Muller-Form zu notieren:
a) $f(x,y,z) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z)$
b) $g(x,y,z) = \mathbf{1}$